∽ Baccalauréat C Centres étrangers juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la règle suivante :
- si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ;
- si elle est blanche, on ne la remet pas.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'évènement « seule la k-ième boule tirée est blanche ». Par exemple, E_1 est l'évènement « seule la première boule tirée est blanche ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des évènements E_2 et E_3. En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

Partie B

On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0,99$?

Exercice 2 **4 points**)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est de 3 cm.
On considère les points B, C, D, E définissant le carré de sens direct BCDE d'affixes respectives :

$$b = 1 - \text{i} \quad ; \quad c = -1 - \text{i} \quad ; \quad d = -1 - 3\text{i} \quad ; \quad e = 1 - 3\text{i}$$

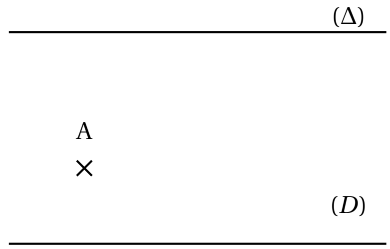
1. Calculer $|b|$, $|c|$, $|d|$ et $|e|$.
2. Soit Γ le cercle de centre O passant par B. Déterminer une équation du cercle Γ. On considère Q un point de Γ distinct de B et C. L'affixe de Q est notée $q = x + \text{i}y$ (avec x et y réels).
3. Soient F et G les points du plan tels que $Q\text{B}FG$ soit un carré de sens direct, c'est-à-dire tels que $\left(\overrightarrow{Q\text{B}},\,\overrightarrow{QG}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. On pose $Z = \dfrac{g - q}{b - q}$ où g est l'affixe du point G.
   Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z.
4. Prouver que $g = (1 + x + y) + \text{i}(1 - x + y)$. En déduire $|g|$ en fonction de x et y.
5. En utilisant la question 2), exprimer $|g|$ en fonction de x et y.
6. À l'aide de considérations géométriques, prouver que : $If| = |g|$, f étant l'affixe du point F.
7. Pour quelles valeurs de x et de y les points E, D, G et F sont-ils sur un cercle de centre O ? Préciser le rayon de ce cercle. En déduire alors la nature du triangle QBC.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : *où on construit un triangle équilatéral.*

On considère la figure suivante où (Δ) et (D) sont deux droites parallèles et A un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'entre elles.



On se propose de construire un triangle équilatéral ABC tel que B et C appartiennent respectivement aux droites (D) et (Δ).

Dans toute la suite, on note R la rotation de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.

1. On considère la droite (D') image de (D) par la rotation R. Montrer que (D') coupe (Δ). On note C le point d'intersection de (D') de (Δ).
2. Soit $\mathrm{B} = R^{-1}(\mathrm{C})$. Montrer que le triangle ABC répond au problème posé.
3. Construire la droite $\left(D'\right)$ et placer les points B et C.

Partie B : où on calcule l'aire de ce triangle équilatétal. Soit O le projeté orthogonal de A sur la droite (D). Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{v}$ est choisi de sorte que le point A ait pour affixe ai (a réel positif).

On note α la distance du point A à la droite (Δ). Soit B un point de (D) d'affixe z_{B}, (z_{B} est réel). On appelle z_{C} l'affixe du point C image de B par la rotation R.

1. Montrer que $z_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{2}\left(z_{\mathrm{B}} + a\sqrt{3}\right) + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(a + z_{\mathrm{B}}\sqrt{3}\right)$.
2. En déduire que le point C appartient à la droite (Δ) si et seulement si
$z_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha)$.
Dans la suite, on prendra cette valeur pour z_{B}.
3. Exprimer AB^2 en fonction de a et de α.
En déduire que l'aire du triangle équilatéral ABC est $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(a^2 + a\alpha + \alpha^2\right)$.

Problème **11 points**

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k, où k est un réel fixe qui vérifie : $0 < k < \mathrm{e}$.

Dans la partie A on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie B.

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x - k.$$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$

3. **a.** Établir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.
   On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité
   $e^{\beta_k} - k\beta_k = \left(e^{\beta_k} - k\right)(\beta_k - 1)$.
4. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$.
   a. Étudier le sens de variation de u.
   b. On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante

   $$\text{pour tout réel } x,\ e^x - kx > 0.$$

2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
   a. Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Prouver que : $g_k'(x) = \dfrac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}$.
   c. En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.
3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisses respectives α_k et β_k.
   a. En utilisant la question 3)b) (partie **A**), montrer que $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.
   b. Donner de même $g_k(\beta_k)$.
   c. Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H dont on donnera une équation.
4. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k :
   a. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   b. Prouver que $\alpha_2 = 0$.
   c. En prenant comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et H sur le même graphique.
   On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$.