Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2.

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b. Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S.

c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1.$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b. Déduire de **a.** tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(48 ; 35 ; 24)$ et le point A de coordonnées $(-11\ ;\ 35\ ;\ -13)$.

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{AM}} = 0$.

b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100\ ;\ 100]$.

En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, A, A$'$, B, B$'$ sont les points d'affixes respectives 1, -1, i, $-$i.

À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A$'$, B et B$'$, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec

$$\left(\overrightarrow{M_1\text{B}}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2\text{A}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, *qui sera complétée et rendue avec la copie*

1. **a.** Justifier les égalités $z - z_1 = \text{i}(\text{i} - z_1)$ et $1 - z_2 = \text{i}(z - z_2)$.

   b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+\text{i}}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-\text{i}}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

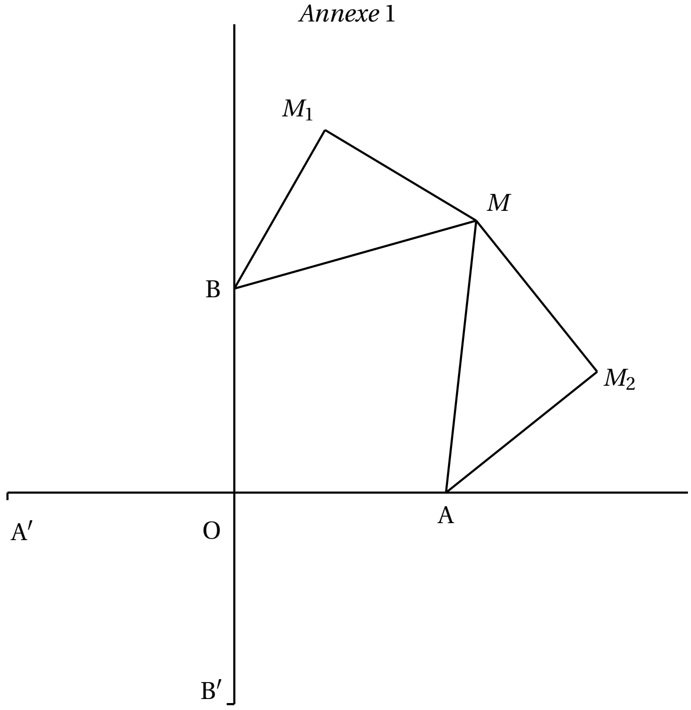
   a. Montrer que : OM_1 = OM_2 équivaut à $|z+1| = |z+\text{i}|$.
   En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que OM_1 = OM_2 et tracer (Δ) sur la figure.

   b. Montrer que : OM_1 = M_1M_2 équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

   c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels OM_1 = M_1M_2.
   On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
   Tracer (Γ) sur la figure.

   d. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

Annexe 1



Problème **10 points**

Commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et d'une primitive de f.

Première partie

Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1).$$

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1).$$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{\mathrm{e}-1}~;~\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α.

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Deuxième partie

Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, dans le plan rapporté à un repère d'origine O, est donnée en *annexe* 2, qui sera complétée et rendue avec la copie.

1. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

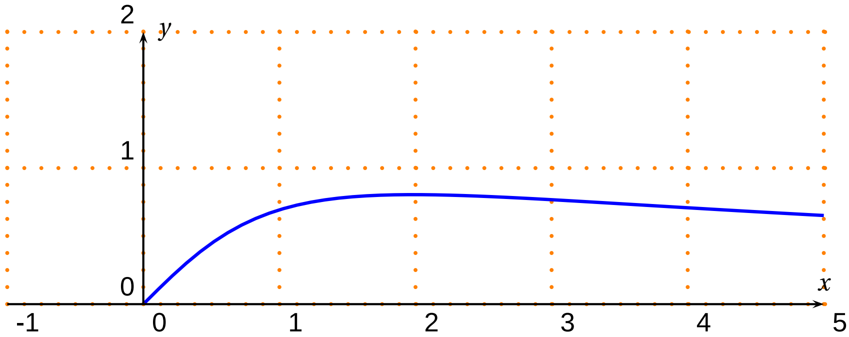
   b. Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\left(1+x^2\right)}$

   Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln\left(2x^2\right)}{x}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Annexe 1



Troisième partie
Étude d'une primitive de f

On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.
On rappelle que $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$: (on ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. **a.** Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{2\ln x}{x}$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_1^x \dfrac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

2. Dresser le tableau des variations de F.
3. Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de $F(2)$. (On prendra $f(\alpha) \approx 0,8$.)
4. On note I le point de coordonnées $(1~;~0)$, A le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(1~;~\ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2~;~\ln 2)$.

   a. Vérifier que B appartient à la tangente $(\mathscr{C})$ en O.

   b. Placer les points I, A et B sur la figure de l'*annexe* 1 et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI].

   c. On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0~;~1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de [OA] et au-dessous de [OB] et de [BA].

   Déterminer un encadrement de $F(0)$, d'amplitude inférieure à 2×10^{-1}.

5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents; on précisera notamment la tangente (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur.

   (Unité graphique : 2 cm)