Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Centres étrangers juin 1994 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

On considère le jeu suivant :
Un joueur dispose de trois disques équilibrés :

— le premier disque a une face bleue et une face rouge
— le deuxième disque a une face bleue et une face jaune
— le troisième disque a une face bleue et une face verte.

Les trois disques sont lancés simultanément de telle sorte qu'ils ne se recouvrent jamais. On compte le nombre de couleurs visibles à l'issue de ce lancer.

1. On note A, B, C les évènements suivants :

   A : « il apparaît une seule couleur »

   B : « il apparaît deux couleurs »

   C : « il apparaît trois couleurs ».

   Calculer les probabilités de A, B et C.

2. Le joueur gagne 50 F s'il apparaît une seule couleur, 25 F s'il apparaît deux couleurs, et rien s'il apparaît trois couleurs.

   On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur :

   a. Préciser les valeurs prises par X.
   b. Déterminer sa loi de probabilité.
   c. Calculer son espérance mathématique.

3. Un joueur joue deux fois de suite. On note Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur sur l'ensemble des deux parties.

   a. Préciser les valeurs prises par Y.
   b. Déterminer sa loi de probabilité.
   c. Calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a = \text{BC}$, $b = \text{CA}$, $c = \text{AB}$.
On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].

   a. Calculer $\text{AB}^2 + \text{AC}^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2. En déduire :

   $$\text{AG}^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right).$$

   Écrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2.

b. Montrer que :

$$\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

2. Déterminer l'ensemble (E).

3. On choisit $a=5$, $b=4$, $c=3$. Placer trois points A, B, C et dessiner (E) dans ce cas particulier.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que
$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\ell$, où ℓ est un réel fixé strictement positif, et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (Γ) le cercle de diamètre [CD]. Placer sur une figure les points A, B, C, D, O et le cercle (Γ).
On désigne par s la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1. *Méthode géométrique*

a. Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude s ; en déduire l'existence de I.

b. Montrer que : $\left(\overrightarrow{\mathrm{ID}}, \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad [2\pi]\quad (1)$ et
$\mathrm{IC}=2\mathrm{ID}.\quad (2)$

c. À l'aide de (1), prouver que I appartient au cercle (Γ), puis, en utilisant (2) que ID $=\ell$. établir enfin que BI = BC.

d. Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de [IC]. Préciser la nature du quadrilatère CADI. Placer le point I.

2. *Utilisation de nombres complexes*

On pose $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\ell}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{v}=\frac{1}{\ell}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et on considère le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ du plan complexe. On note z_0 l'affixe de I.

a. Déterminer les affixes des points B, C et D.

b. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s, Déterminer z_0 et préciser la position de I.

PROBLÈME **12 points**

L'objet du problème est de montrer que, pour n très grand, $n!$ est comparable à $\frac{n^n\left(\sqrt{n}\right)}{\mathrm{e}^n}$.
À cette fin on introduit la suite obtenue en faisant le quotient de ces deux quantités.
À l'aide de fonctions étudiées dans les parties I et III on montre d'abord que cette suite a une limite positive ou nulle (partie II), puis que cette limite est strictement positive (partie IV).

Soit donc la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\left(\sqrt{n}\right)}.$$

Partie I

Étude du signe d'une première fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln(x).$$

1. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1~;~+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
3. Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est égale à 0.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]1~;~+\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]1~;~+\infty[$.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Partie II

Étude de la convergence de la suite (u_n)

Soit (v_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** En remarquant que $\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)$, que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)$$

   où f est la fonction étudiée dans la partie I.

   b. étudier le sens de variation de la suite (v_n), puis le sens de variation de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul, noté ℓ.

Partie III

Étude du signe d'une deuxième fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[2~;~+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

où f est la fonction définie à la partie I.

1. Calculer la dérivée g' de g et vérifier que, pour tout x dans $[2\ ;\ +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-7x^2+16x-4}{20x^3(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

2. Dresser le tableau de variations de g, calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2\ ;\ +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g.)

Partie IV

Cette dernière partie a pour but de montrer que la limite ℓ de la suite (u_n) est un réel strictement positif.

1. Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

a. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x. \quad (2)$$

b. Déduire de (2) l'inégalité, pour n entier supérieur ou égal à 2,

$$w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x. \quad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

c. Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et montrer que $w_n \leqslant 1$.

d. Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel w vérifiant $w \leqslant 1$.

2. a. À l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie II et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie III, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$v_k - v_{k-1} \geqslant -\frac{1}{5k^2}.$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$v_n \geqslant -\frac{1}{5}w_n + 1.$$

c. Montrer enfin que la limite ℓ de la suite (u_n) est supérieure ou égale à $\mathrm{e}^{\frac{4}{5}}$ et donc est strictement positive.