∽ Baccalauréat C Centres étrangers gr. I juin 1978 ∾

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble A ($A \subset \mathbb{Z}$) des entiers relatifs m tels que $m^2 + m + 1$ soit divisible par 13.
(On conseille de résoudre au préalable dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $u^2 + u + \dot{1} = 0$).
2. Déterminer l'ensemble B ($B \subset \mathbb{Z}$) des entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 1$ soit divisible par 169.

EXERCICE 2

La lettre t désigne le temps. Dans un plan euclidien rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les points mobiles M_1 et M_2 sont définis par leurs coordonnées. à l'instant t :

$$M_1 \left|\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & \cos t \\ Y1(t) & = & t - \sin t \end{array}\right. \qquad M_2 \left|\begin{array}{lcl} x_2(t) & = & 1 - \dfrac{t^2}{4} \\ y_2(t) & = & -\dfrac{t^2}{4} \end{array}\right.$$

Le mouvement de chaque point commence à l'instant $t = 0$, et on considère qu'il cesse quand le point atteint l'axe $\left(\mathrm{O},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les durées des deux mouvements.
Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_1}$ de M_1 (resp. $\overrightarrow{V_2}$ de M_2) à l'instant t de leurs déroulements respectifs.
2. Établir une relation indépendante du temps entre l'abscisse du mobile M_1 et le carré de sa vitesse. Même question pour M_2·
3. Montrer que les deux mouvements satisfont, à chaque instant de leur déroulement respectif, la relation :
$$\vec{V} \cdot \left(\vec{\Gamma} + \vec{\imath}\right) = 0,$$
où $\vec{V}$ désigne le vecteur-vitesse et $\vec{\Gamma}$ le vecteur-accélération.

PROBLÈME

Partie I

Un plan affine euclidien Π est rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = -1$.
Soit $\Pi*$ l'ensemble des points de Π dont aucune coordonnée n'est nulle, et T la transformation de $\Pi*$ ainsi définie :
Si M a pour coordonnées $(x~;~y)$, $\mu = T(M)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{y}{x}~;~y\right)$.

1. Vérifier que est T involutive, et que si M et μ sont associés par T, $\overrightarrow{\mathrm{O}\mu}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ sont orthogonaux, N désignant la projection orthogonale de M sur Δ.
2. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas zéro, φ une bijection involutive de J et (γ) l'arc de courbe admettant relativement au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ l'équation $y = x\varphi(x)$, $x \in J$.
Démontrer que (γ) est globalement invariant par T.
3. Exemple :

a. Étudier les variations de la fonction numérique :

$$x \longmapsto h(x) = x\sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$$

b. Préciser l'intervalle J, la bijection φ s'explicitant ici par

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$$

c. Tracer avec soin l'arc (γ) correspondant.

Partie II

On s'intéresse désormais à la courbe C du plan Π qui admet relativement au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'équation :

$$y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

On pose $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\ \{0\}$.

1. Montrer que la transformée de C^* par T est incluse dans un cercle.
Sur une même figure, tracer ce cercle et construire C.
On pourra, en cas de besoin, s'aider des variations de la fonction

$$g\,:\,x \longmapsto \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

2. On joint le point M de C d'abscisse x au point M' de C d'abscisse x' ($x' \neq x$).
Former le coefficient directeur de la droite MM' et celui de la tangente en M à C.
Montrer que M' est sur la tangente en M si et seulement si on a la relation :

$$x' + \frac{x^2-1}{2x} = 0.$$

On se propose de manipuler, dans la suite, les couples $(x\ ;\ x')$ de cette relation (y compris, abusivement, ceux pour lesquels $x = x'$) en les « paramétrant » :

$$x = \operatorname{cotg}\ u, \quad x' = \operatorname{cotg}\ v.$$

3. Soit l'intervalle réel $J =]0\ ;\ \pi[$.

a. Montrer que la relation $\operatorname{cotg}\ v + \operatorname{cotg}\ 2u = 0$, où $(u, v) \in J \times J$, définit une fonction $f_1\,:\,u \longmapsto v = f_1(u)$ de J dans lui-même ; cette fonction est affine par morceaux ; préciser son ensemble de définition et tracer sa représentation graphique.

b. On pose $f_2 = f_1 \circ f_1$, $f_3 = f_1 \circ f_1 \circ f_1$, etc. (où le symbole $\circ$ désigne la composition des fonctions) ; préciser les ensembles de définition de f_2 de f_3 et tracer séparément leurs représentations graphiques.
Établir que, si t est un réel non entier de l'intervalle $]0\,;\,4[$ et $\mathrm{E}(t)$ la partie entière de ce réel, on a :

$$f_2\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \pi \cdot [t - \mathrm{E}(t)].$$

c. Pour cette dernière question on admet que tout réel de l'intervalle $]0\,;\,1[$ peut être représenté, en base quatre, par un développement

$$0,\ a_1 a_2 \ldots a_i \ldots \left(a_1 \cdot \frac{1}{4} + a_2 \cdot \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$

où chaque chiffre a_i est élément de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
Soit p un entier naturel fixé, et $\mathscr{F}$ la famille des intervalles

$$\left]k\frac{\pi}{4^p}\ ;\ (k+1)\frac{\pi}{4^p}\right[,\ k \text{ entier, } 0 \leqslant k < 4^p.$$

À partir d'un réel $\alpha \in J$ on forme la suite (lorsqu'elle existe) $n \longmapsto \alpha_n$ dont les termes sont :

$$\alpha_1 = f_1(\alpha),\ \alpha_2 = f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha), \ldots, \alpha_n = f_1(\alpha_{n-1}), \ldots$$

Peut-on choisir α pour que cette suite ait un terme au moins dans chaque intervalle de $\mathscr{F}$?