Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1998

Exercice 1 **5 points**

Partie A

Soient a et b des nombres réels.
On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + a\mathrm{e}^{x} + b,$$

et on désigne par f' sa fonction dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. On sait que $f(\ln 3) = -9$ et $f'(\ln 3) = 0$.
   Déterminer les nombres réels a et b.

Partie B

Le but de cette partie est le calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \left[(2x+1)\mathrm{e}^{2x} - 6(x+1)\mathrm{e}^{x}\right]\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

   $$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x}.$$

   On pose, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$.
   Calculer $g'(x)$.
2. En déduire la valeur exacte de I.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Pour chaque probabilité demandée on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-4} près.
Dans une université, 55 % des étudiants possèdent un ordinateur. Parmi les étudiants ayant un ordinateur :

- 20 % ont un violon ;
- 30 % ont une flûte ;
- aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

Parmi les étudiants n'ayant pas d'ordinateur :

- 5 % ont un violon ;
- 15 % ont une flûte ;
- aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On définit les évènements suivants :

- D, l'étudiant a un ordinateur ;
- V, l'étudiant a un violon ;
- F, l'étudiant a une flûte ;
- R, l'étudiant n'a aucun de ces deux instruments de musique.

Ainsi : la probabilité $p(D)$ de l'évènement D est 0,55 ; la probabilité $p(V/D)$ qu'un étudiant ait un violon sachant qu'il a un ordinateur est 0,2.

1. Calculer la probabilité que l'étudiant ait un ordinateur et un violon.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant ait un violon et pas d'ordinateur.

3. Calculer $p(V)$.
4. Calculer $p(F)$.
5. Quelle est la probabilité que l'étudiant ait un ordinateur sachant qu'il a une flûte ?

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Un éditeur établit ses prix pour l'année chaque 1$^{\text{er}}$ janvier.
Dans tout l'exercice nous nous intéresserons à deux collections publiées par l'éditeur : la collection A et la collection B.
Dans chaque collection, tous les volumes sont vendus au même prix unitaire.

I - Étude de la collection A.

Le prix unitaire des livres de cette collection augmente de 7 F au 1$^{\text{er}}$ janvier de chaque année. On désigne par P le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995. Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par P_n le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(1995+n)$. Par exemple, P_3 est le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 1998.

1. **a.** Pour $n \geqslant 1$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1}.

   b. Exprimer P_n en fonction de n et de P_0.
2. Le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995 le prix unitaire était 150 F.

   a. Quel sera le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 2007 ?

   b. À quelle date le prix unitaire sera-t-il pour la première fois supérieur à 250 F ?

II - Étude de la collection B

Le prix unitaire des livres de cette collection augmente de 3 % au 1$^{\text{er}}$ janvier de chaque année. On désigne par R_0 le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995.
Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par R_n le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(1995+n)$. Par exemple, R_3 est le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier1998.

1. **a.** Pour $n \geqslant 1$, exprimer R_n en fonction de R_{n-1}.

   b. Exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
2. Le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995 le prix unitaire était 150 F.

   a. Quel sera le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 2007 ? (on donnera la valeur arrondie entière de ce prix à 1 F près).

   b. À quelle date le prix unitaire sera-t-il pour la première fois supérieur à 250 F ?

Problème **10 points**

Les objectifs de ce problème sont l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (partie II), s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (partie I).

I Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - 5 + 5\ln x.$$

1. Étudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1~;~7]$. On note α cette solution.

   b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3. Étudier le signe de $g(x)$, pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

II Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x-5)\ln x}{x}$$

On peut donc aussi écrire

$$f(x) = \frac{1}{x}(x-5)\ln x \quad \text{et} \quad f(x) = \ln x - \frac{5\ln x}{x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

   a. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse 1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ tangente en A à la la courbe $\mathcal{C}$.

   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

   b. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sur papier millimétré. (Unité graphique : 2 cm)