Durée : 4 heures

Baccalauréat septembre 1965 Centres étrangers [1]
Série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Dans cet exercice, n est un nombre premier.

1. C_n^p désignant le nombre des combinaisons de n éléments distincts pris p à p, montrer que, si p est différent de 0 et de n, C_n^p est divisible par n.
2. Montrer que, si a est entier, $(a+1)^n - a^n - 1$ est divisible par n.
3. Montrer, en raisonnant par récurrence sur b, que, si b est entier, $b^n - b$ est divisible par n.

N. B. - On rappelle la formule

$$(x+y)^n = x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} y + \cdots + \mathrm{C}_n^p x^{n-p} y^p + \cdots + y^n.$$

EXERCICE 2

On donne, dans un plan, un cercle (O), de centre O, de rayon R, et un point fixe P intérieur au cercle ; OP $= p$.
Deux droites, Δ et Δ', perpendiculaires entre elles pivotent autour de P et coupent le cercle, la première en A et C, la seconde en B et D.
ω désigne le milieu de OP, H et K les projections orthogonales des points O et P sur AB, H$'$ et K$'$ les projections des mêmes points O et P sur CD.

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OH'}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$.
   Exprimer au moyen de $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ les sommes

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

2. On rapporte la figure à un repère orthonormé $\left(x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y\right)$, la demi-droite O$x$ contenant le point P. On pose

$$\left(x'\mathrm{O}x,\ \Delta\right) = \theta \quad \text{modulo}\ \pi.$$

   Former les équations ayant respectivement pour racines les abscisses des points A et C d'une part, des points B et D d'autre part.
   Si l'on pose

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \alpha, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \beta, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \gamma, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \delta$$

   angles de demi-droites définis modulo 2π, calculer

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$$

1. Algérie, Tunisie, Cameroun, Togo, Gabon, Tchad, Congo, République Centrafricaine, Dahomey, Malin Côte d'Ivoire, Haute-Volta, Niger, Mauritanie, Athènes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, Syrie, Le Caire, Addis-Abbéba, Djibouti

$$\text{et} \quad \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\delta.$$

Calculer les expressions analogues relatives aux sinus.

Peut-on retrouver ici les résultats obtenus au 1 ?

3. Établir les relations

$$\mathrm{OH}^2 + \mathrm{PH}^2 = \mathrm{OK}^2 + \mathrm{PK}^2 = R^2$$

et en déduire l'ensemble des points H et K, ainsi que l'enveloppe de la droite AB ; on en précisera les éléments.

4. Les droites AB et CD se coupent en E ; AD et BC se coupent en F.

Quelle est la polaire par rapport au cercle (O) de chacun des points E, F et P ?

Quel est l'ensemble des points E et F ?

Montrer que le cercle de diamètre EF est orthogonal à (O) et qu'il appartient à un faisceau linéaire ; préciser la nature de ce faisceau.

Montrer que l'axe radical du cercle de diamètre EF eL du cercle (O) passe par un point fixe.

N. B. - Les quatre parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.