

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat Centres étrangers¹ septembre 1965 ∞
Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Dans cet exercice, n est un nombre premier.

1. C_n^p désignant le nombre des combinaisons de n éléments distincts pris p à p , montrer que, si p est différent de 0 et de n , C_n^p est divisible par n .
2. Montrer que, si a est entier, $(a+1)^n - a^n - 1$ est divisible par n .
3. Montrer, en raisonnant par récurrence sur b , que, si b est entier, $b^n - b$ est divisible par n .

N. B. - On rappelle la formule

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^p x^{n-p} y^p + \dots + y^n.$$

EXERCICE 2

On donne, dans un plan, un cercle (O), de centre O, de rayon R, et un point fixe P intérieur au cercle ; $OP = p$.

Deux droites, Δ et Δ' , perpendiculaires entre elles pivotent autour de P et coupent le cercle, la première en A et C, la seconde en B et D.

ω désigne le milieu de OP, H et K les projections orthogonales des points O et P sur AB, H' et K' les projections des mêmes points O et P sur CD.

1. Montrer que $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OP}$.
Exprimer au moyen de \overrightarrow{OP} les sommes

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

2. On rapporte la figure à un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$, la demi-droite Ox contenant le point P. On pose

$$(x'Ox, \Delta) = \theta \quad \text{modulo } \pi.$$

Former les équations ayant respectivement pour racines les abscisses des points A et C d'une part, des points B et D d'autre part.

Si l'on pose

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \alpha, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB}) = \beta, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC}) = \gamma, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OD}) = \delta$$

angles de demi-droites définis modulo 2π , calculer

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta$$

$$\text{et} \quad \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \delta.$$

Calculer les expressions analogues relatives aux sinus.

Peut-on retrouver ici les résultats obtenus au 1 ?

1. Algérie, Tunisie, Cameroun, Togo, Gabon, Tchad, Congo, République Centrafricaine, Dahomey, Malin Côte d'Ivoire, Haute-Volta, Niger, Mauritanie, Athènes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, Syrie, Le Caire, Addis-Abbéba, Djibouti

3. Établir les relations

$$OH^2 + PH^2 = OK^2 + PK^2 = R^2$$

et en déduire l'ensemble des points H et K, ainsi que l'enveloppe de la droite AB ; on en précisera les éléments.

4. Les droites AB et CD se coupent en E ; AD et BC se coupent en F.

Quelle est la polaire par rapport au cercle (O) de chacun des points E, F et P ?

Quel est l'ensemble des points E et F ?

Montrer que le cercle de diamètre EF est orthogonal à (O) et qu'il appartient à un faisceau linéaire ; préciser la nature de ce faisceau.

Montrer que l'axe radical du cercle de diamètre EF et du cercle (O) passe par un point fixe.

N. B. - Les quatre parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.