# ∽ Baccalauréat C Centres étrangers septembre 1977 ∾

### EXERCICE 1

**1.** Montrer que, selon que l'entier naturel $n$ est pair ou impair, l'entier $n^4$ est congru modulo 16 à 0 ou à 1.

**2.** Soit $A$ l'anneau $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +, \times)$, dont on désigne les éléments par $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}$, ...

Expliciter l'ensemble $S$ des solutions de l'équation : $x^4 = \dot{1}$, dans laquelle l'inconnue est l'élément $x$ de $A$.

Étant donné le naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant 15$, on considère l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=k} (x_i)^4 = k$$

dans laquelle l'inconnue est l'élément $(x_1, ..., x_k)$ de $A^k$.

Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est $S^k$ ($A^k$ et $S^k$ désignent respectivement les produits de $k$ ensembles égaux à $A$ et de $k$ ensembles égaux à $S$).

### EXERCICE 2

Dans un espace vectoriel euclidien $E$, de dimension 3, on donne deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ dont le produit scalaire $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ n'est pas nul.

À tout réel $k$ on associe l'endomorphisme $u_k$ de $E$ (c'est-à-dire l'application linéaire de $E$ dans lui-même) qui est déterminé par

$$u_k\left(\overrightarrow{X}\right) = \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{A} + k\overrightarrow{X}$$

(en désignant par $\left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{A}$ le vecteur obtenu en multipliant le vecteur $\overrightarrow{A}$ par le réel $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}$).

**1.** Montrer que le plan vectoriel $(P)$ ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à $\overrightarrow{B}$ et la droite vectorielle $(D)$ ensemble des vecteurs de $E$ colinéaires à $\overrightarrow{A}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.

Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{Y}$ de $(P)$ et un vecteur $\overrightarrow{Z}$ de $(D)$ sont respectivement transformés par $u_k$ en des vecteurs de la forme $\lambda_k\overrightarrow{Y}$ et $\mu_k\overrightarrow{Z}$, $\lambda_k$ et $\mu_k$ désignant des réels que l'on exprimera en fonction de $k$ (et, éventuellement, de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$).

**2.** Déterminer le noyau $N_k$ et l'image $I_k$ de l'endomorphisme $u_k$ : on étudiera chacun des cas qui se présenteront ; on montrera que, en général, $u_k$ est inversible.

### PROBLÈME

**1.** Soit $H$ l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par

$$\begin{array}{lcrll} H(x) & = & -x+\dfrac{3}{4} & \text{si} & x \leqslant 0,\\ H(x) & = & x-\dfrac{3}{4} & \text{si} & x \geqslant 1,\\ H(x) & = & \dfrac{x^4}{2}-x+\dfrac{3}{4} & \text{si} & 0 < x < 1. \end{array}$$

**a.** Montrer que $H$ est continue et admet une dérivée $H'(x)$ en tout point $x$ de $\mathbb{R}$ ; montrer que $H'$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En quels points de $\mathbb{R}$ l'application $H$ admet-elle une dérivée seconde ?

**b.** Étudier les variations des applications $H$ et $H'$ ; les représenter graphiquement dans un même plan rapporté à un repère orthonormé (unité de longueur : 4 cm).

**2.** Soit $g$ une application continue du segment $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On lui associe l'application $G$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par

$$G(x) = \int_0^1 |x - t| g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**a.** On suppose d'abord $x \in [0 : 1]$. Montrer qu'en considérant le segment $[0 : 1]$ comme la réunion des segments $[0 ; x]$ et $[x ; 1]$ on peut exprimer $G(x)$ à l'aide des intégrales

$$A(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

et des nombres $a = A(1)$ et $b = B(1)$.

**b.** Montrer que, sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[1 ; +\infty[$, $G$ coïncide avec une fonction affine.

**c.** Dans le cas particulier $g(t) = t^2$, comparer $G$ à l'application $H$ étudiée au **1**.

**3. a.** En revenant au cas général, montrer que $G$ est continue et admet une dérivée en tout point de $\mathbb{R}$ ; montrer que $G'$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En quels points de $\mathbb{R}$ l'application $G$ admet-elle une dérivée seconde ?

**b.** On admet que l'on a défini l'addition de deux fonctions réelles d'une variable réelle, le produit de l'une de ces fonctions par un réel et que l'on a montré que ces opérations permettent de munir d'une structure d'espace vectoriel chacun des ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ respectivement constitués par les applications continues de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ et par les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une dérivée continue.

Montrer qu'en posant $\varphi(g) = G$, on détermine une application linéaire $\varphi$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

**4.** On reprend les notations du 2. a. et on se limite à $x \in [0 ; 1]$.

Exprimer $G(x)$ sans signe d'intégration dans le cas où $g$ est la dérivée seconde d'une application donnée, $f$, de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ ; pour cela on montrera que, dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & f'(x) - f'(0) \\ B(x) & = & xf'(x) - f(x) + f(0). \end{array}$$

Déduire de cette étude que, pour toute application $f$ de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde continue, on peut écrire, pour tout $x \in [0 ; 1]$ :

$$f(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\int_0^1 |x - t| f''(t)\,\mathrm{d}t,$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant des constantes, que l'on exprimera en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.