

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres étrangers juin 1994 ∞

EXERCICE 1

4 points

On considère le jeu suivant :

Un joueur dispose de trois disques équilibrés :

- le premier disque a une face bleue et une face rouge
- le deuxième disque a une face bleue et une face jaune
- le troisième disque a une face bleue et une face verte.

Les trois disques sont lancés simultanément de telle sorte qu'ils ne se recouvrent jamais. On compte le nombre de couleurs visibles à l'issue de ce lancer.

1. On note A, B, C les événements suivants :

A : « il apparaît une seule couleur »

B : « il apparaît deux couleurs »

C : « il apparaît trois couleurs ».

Calculer les probabilités de A, B et C.

2. Le joueur gagne 50 F s'il apparaît une seule couleur, 25 F s'il apparaît deux couleurs, et rien s'il apparaît trois couleurs.

On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur :

- a. Préciser les valeurs prises par X.
- b. Déterminer sa loi de probabilité.
- c. Calculer son espérance mathématique.

3. Un joueur joue deux fois de suite. On note Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur sur l'ensemble des deux parties.

- a. Préciser les valeurs prises par Y.
- b. Déterminer sa loi de probabilité.
- c. Calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a , b , c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].

- a. Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2 . En déduire :

$$AG^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Écrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2 .

- b. Montrer que :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

2. Déterminer l'ensemble (E),

3. On choisit $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Placer trois points A, B, C et dessiner (E) dans ce cas particulier.

EXERCICE 2**4 points****Enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = AC = \ell$, où ℓ est un réel fixé strictement positif, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (Γ) le cercle de diamètre [CD]. Placer sur une figure les points A, B, C, D, O et le cercle (Γ) .

On désigne par s la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, les éléments caractéristiques de s , notamment son centre I.

1. Méthode géométrique

- Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude s ; en déduire l'existence de I.
- Montrer que : $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ (1) et $IC = 2ID$. (2)
- À l'aide de (1), prouver que I appartient au cercle (Γ) , puis, en utilisant (2) que $ID = \ell$. Établir enfin que $BI = BC$.
- Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de [IC]. Préciser la nature du quadrilatère CAD I. Placer le point I.

2. Utilisation de nombres complexes

On pose $\vec{u} = \frac{1}{\ell} \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \frac{1}{\ell} \overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormal (A, \vec{u}, \vec{v}) du plan complexe. On note z_0 l'affixe de I.

- Déterminer les affixes des points B, C et D.
- Déterminer l'écriture complexe de la similitude s , Déterminer z_0 et préciser la position de I.

PROBLÈME**12 points**

L'objet du problème est de montrer que, pour n très grand, $n!$ est comparable à $\frac{n^n (\sqrt{n})}{e^n}$.

À cette fin on introduit la suite obtenue en faisant le quotient de ces deux quantités. À l'aide de fonctions étudiées dans les parties I et III on montre d'abord que cette suite a une limite positive ou nulle (partie II), puis que cette limite est strictement positive (partie IV).

Soit donc la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n (\sqrt{n})}.$$

Partie I**Étude du signe d'une première fonction auxiliaire**

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln(x).$$

1. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}.$$

2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
 3. Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est égale à 0.
 4. Dresser le tableau de variation de f sur $]1; +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]1; +\infty[$.
 5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 4 cm).

Partie II

Étude de la convergence de la suite (u_n)

Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \ln(u_n)$.

1. a. En remarquant que $\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n)$, que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)$$

où f est la fonction étudiée dans la partie I.

- b. Étudier le sens de variation de la suite (v_n) , puis le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul, noté ℓ .

Partie III

Étude du signe d'une deuxième fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

où f est la fonction définie à la partie I.

1. Calculer la dérivée g' de g et vérifier que, pour tout x dans $[2; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

2. Dresser le tableau de variations de g , calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g .)

Partie IV

Cette dernière partie a pour but de montrer que la limite ℓ de la suite (u_n) est un réel strictement positif.

1. Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

- a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx. \quad (2)$$

- b. Dédire de (2) l'inégalité, pour n entier supérieur ou égal à 2,

$$w_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx. \quad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

- c. Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $\int_1^n \frac{1}{x^2} dx$ et montrer que $w_n \leq 1$.
- d. Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel w vérifiant $w \leq 1$.
2. a. À l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie II et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie III, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$v_k - v_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$v_n \geq -\frac{1}{5} w_n + 1.$$

- c. Montrer enfin que la limite ℓ de la suite (v_n) est supérieure ou égale à $e^{\frac{5}{4}}$ et donc est strictement positive.