Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1400	0	374
1500	100	458
1600	200	580
1800	400	958
1900	500	1 650
1950	550	2 519
1970	570	3 691
1980	580	4 430
1990	590	5 255
2000	600	6 057

Source : site internet de l'INED (Institut national des études démographiques)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ en utilisant le repère semi-logarithmique joint en annexe.
2. On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

   a. Reproduite sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs z_i.

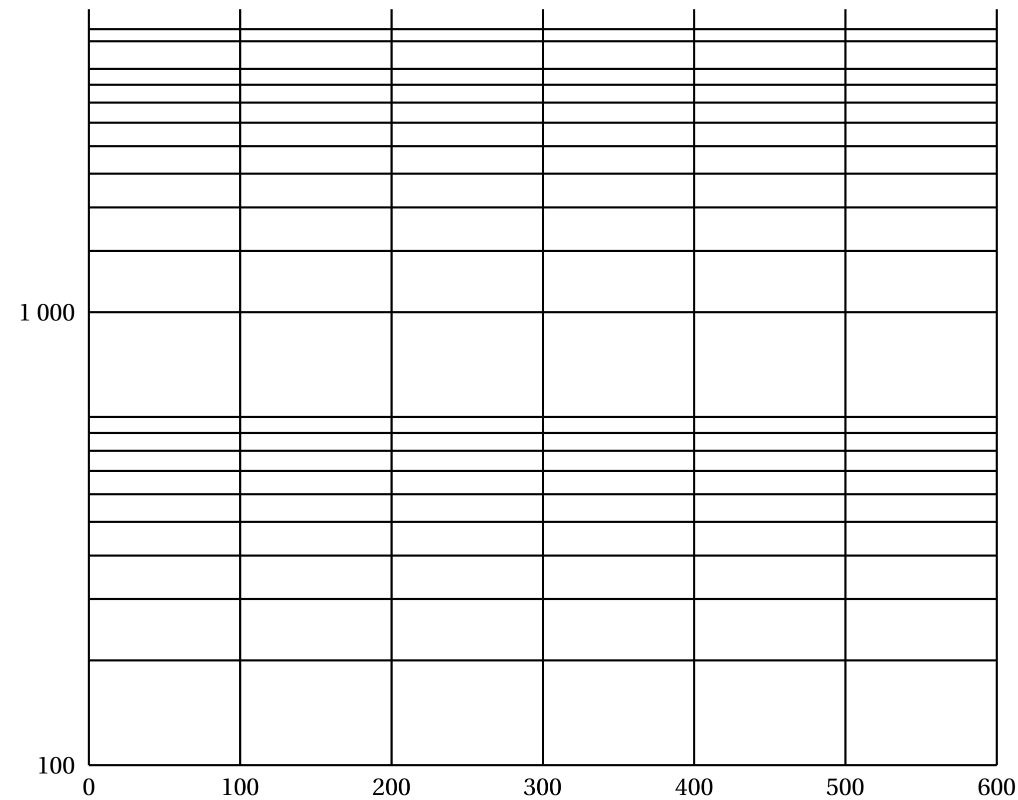
Rang x_i de l'année	500	550	570	580	590	600
$z_i = \ln(y_i)$						

   b. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

   c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = b \times a^x$, où a et b sont deux réels à déterminer.

   d. Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

Annexe à compléter et à remettre avec la copie



EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une station-service, la probabilité que n clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

n	0	1	2
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

On note C_n l'évènement « n clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note D_p l'évènement : « p clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

On rappelle que $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

2. On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

a. Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

b. Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

3. Les probabilités de l'évènement D sachant que C, est réalisé pour toutes les valeurs possibles de p et n, seront présentées dans le tableau suivant :

	C_0	C_1	C_2
D_0	1		
D_1	0		$\frac{12}{25}$
D_2	0	0	

a. Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

b. Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

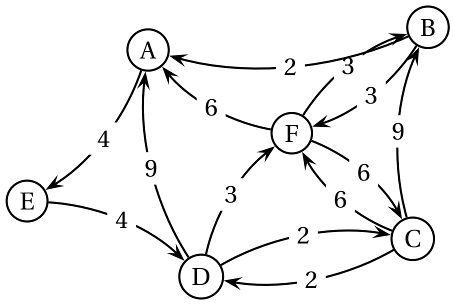
c. Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes (on les donnera sous forme de fractions).

4. Déterminer la probabilité de l'évènement D.

EXERCICE 2 — 6 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après- midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de par- cours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M associée au graphe G.
   On utilisera le modèle suivant :

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

a. Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

b. Citer ces chemins.

   c. Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

   d. Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

PROBLÈME — 10 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 100\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée).

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Calculer la dérivée f' et étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et D dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à $[1\ ;\ 18]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 50$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 18]$.

6. Calculer la valeur exacte du nombre $\mathrm{M} = \dfrac{1}{17}\displaystyle\int_0^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis donner sa valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B

Modélisation d'un coût

Un artisan confiseur qui propose des chocolats « faits maison » en fabrique de 1 à 18 kg par jour. Le coût moyen de fabrication d'un kilogramme de chocolats est exprimé en euro. Il est modélisé par la fonction f étudiée dans la **partie A**, où x désigne la masse en kg de chocolats fabriqués ($1 \leqslant x \leqslant 18$).
Dans la suite, on utilisera les résultats de la **partie A**.

1. **a.** Déterminer, à un euro près, le coût moyen de fabrication pour 6 kg fabriqués.

   b. Quelle est la quantité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum ?

   c. Quel est alors ce coût ?

2. L'artisan vend ses chocolats au prix de 50 € le kilogramme.
Quelle quantité minimale doit-il fabriquer pour faire un bénéfice ?

3. Quelle est pour l'artisan la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats ?

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1400	0	374
1500	100	458
1600	200	580
1800	400	958
1900	500	1 650
1950	550	2 519
1970	570	3 691
1980	580	4 430
1990	590	5 255
2000	600	6 057

Source : site internet de l'INED (Institut national des études démographiques)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ en utilisant le repère semi-logarithmique joint en annexe.

2. On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.

a. Reproduite sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs z_i.

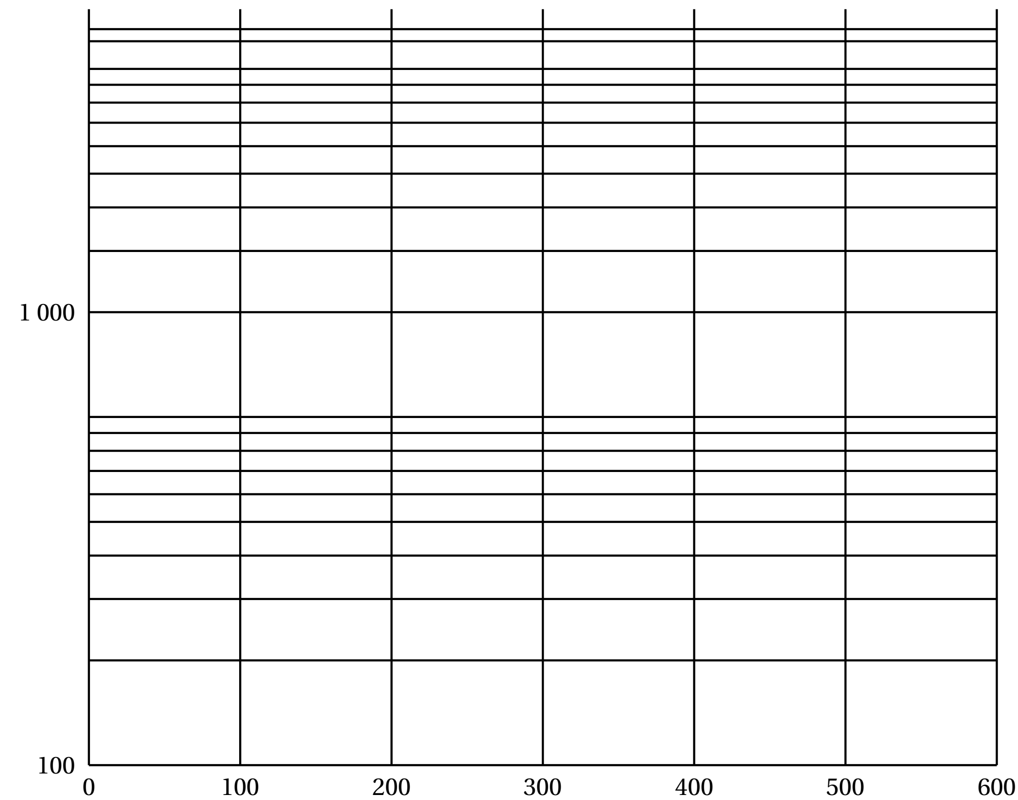
Rang x_i de l'année	500	550	570	580	590	600
$z_i = \ln(y_i)$						

b. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = b \times a^x$, où a et b sont deux réels à déterminer.

d. Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

Annexe à compléter et à remettre avec la copie



EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une station-service, la probabilité que n clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

n	0	1	2
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

   On note C_n l'évènement « n clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

   Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note D_p l'évènement : « p clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

   On rappelle que $P_{\text{B}}(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

2. On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

   a. Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

   b. Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

3. Les probabilités de l'évènement D sachant que C, est réalisé pour toutes les valeurs possibles de p et n, seront présentées dans le tableau suivant :

	C_0	C_1	C_2
D_0	1		
D_1	0		$\frac{12}{25}$
D_2	0	0	

a. Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

b. Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

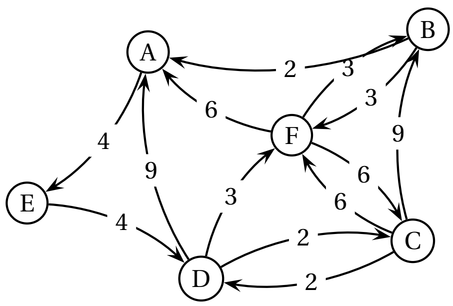
c. Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes (on les donnera sous forme de fractions).

4. Déterminer la probabilité de l'évènement D.

EXERCICE 2 — 6 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après- midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de par- cours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M associée au graphe G.

On utilisera le modèle suivant :

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

a. Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

b. Citer ces chemins.

   c. Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

   d. Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

PROBLÈME — 10 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 100\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée).

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Calculer la dérivée f' et étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et D dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à $[1\ ;\ 18]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 50$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 18]$.

6. Calculer la valeur exacte du nombre $\mathrm{M} = \dfrac{1}{17}\displaystyle\int_0^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis donner sa valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B

Modélisation d'un coût

Un artisan confiseur qui propose des chocolats « faits maison » en fabrique de 1 à 18 kg par jour. Le coût moyen de fabrication d'un kilogramme de chocolats est exprimé en euro. Il est modélisé par la fonction f étudiée dans la **partie A**, où x désigne la masse en kg de chocolats fabriqués ($1 \leqslant x \leqslant 18$).
Dans la suite, on utilisera les résultats de la **partie A**.

1. **a.** Déterminer, à un euro près, le coût moyen de fabrication pour 6 kg fabriqués.

   b. Quelle est la quantité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum ?

   c. Quel est alors ce coût ?

2. L'artisan vend ses chocolats au prix de 50 € le kilogramme.
Quelle quantité minimale doit-il fabriquer pour faire un bénéfice ?

3. Quelle est pour l'artisan la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats ?