Baccalauréat S Centres étrangers juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit a un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$$

et par la condition initiale $u_1 = a$.

a. Soit (v_n) la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 13u_n - 4$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

Exprimer v_n en fonction de n et a.

b. Prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire de E_n.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. On note a la probabilité p_1 qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

— Si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $n+1$ est $\frac{1}{10}$.

— Si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est $\frac{4}{10}$.

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$.

Pour cela, on pourra d'abord calculer les probabilités conditionnelles $p\left(E_{n+1}/E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right)$.

En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

b. À l'aide des résultats de la question 1., donner l'expression de p_n en fonction de a et n.

La limite p de p_n dépend-elle de la condition initiale a ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan $\mathbb{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Lorsqu'un point de $\mathbb{P}$ est désigné par une lettre majuscule (A, B, G, ..., M_1, ..., M$'$, ...), on convient de désigner son affixe complexe par la lettre minuscule correspondante (a, b, g, ..., m_1, ..., m', ...).

Soient A, B, C trois points du plan $\mathbb{P}$. On note G leur isobarycentre.

À tout point M du plan $\mathbb{P}$ on associe les points M_1, M_2, M_3 isobarycentres respectifs de {M, B, C}, {M, A, C} et {M, A, B}. On note enfin M$'$ l'isobarycentre de $\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3\}$.

1. a. Tracer le triangle ABC et son isobarycentre G sur une figure.

Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$, en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$. En déduire l'expression de g en fonction de a, b, c.

b. Exprimer de même m_1, m_2, m_3 puis m' en fonction de a, b, c, m.

2. Soit f la transformation qui à tout point M de $\mathbb{P}$ associe le point M$'$.

a. Montrer que $m' - g = \frac{1}{3}(m - g)$.

b. En déduire la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques.

c. Placer sur la figure l'image A$'$B$'$C$'$ du triangle ABC par la transformation f.

d. Déterminer le rapport des aires de ces deux triangles.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère deux points distincts donnés F et F$'$ du plan orienté. On note O le milieu de [FF$'$] et Δ la médiatrice de ce segment. On pose c = OF. On note A et B les points de Δ tels que OA = OB = c.
On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient D et D$'$ les droites symétriques de Δ par rapport à F et F$'$.
Ces différents éléments sont placés sur la figure ci-dessous. Il convient de reproduire cette figure sur la copie.

1. a. On considère les points P = r(A) et Q = s(A). Prouver que r(Q) = B.
Déterminer la nature du quadrilatère APQB et tracer ce quadrilatère sur la figure.

b. Déterminer les images respectives du segment [AB] par s, par r et par $r \circ s$.

c. À tout point N du segment [AB], on associe les points H = s(N), I = r(N), et J = r(H) = $(r \circ s)$(N).
Déterminer la nature du quadrilatère NIHJ et tracer ce quadrilatère sur la figure.

2. On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI.

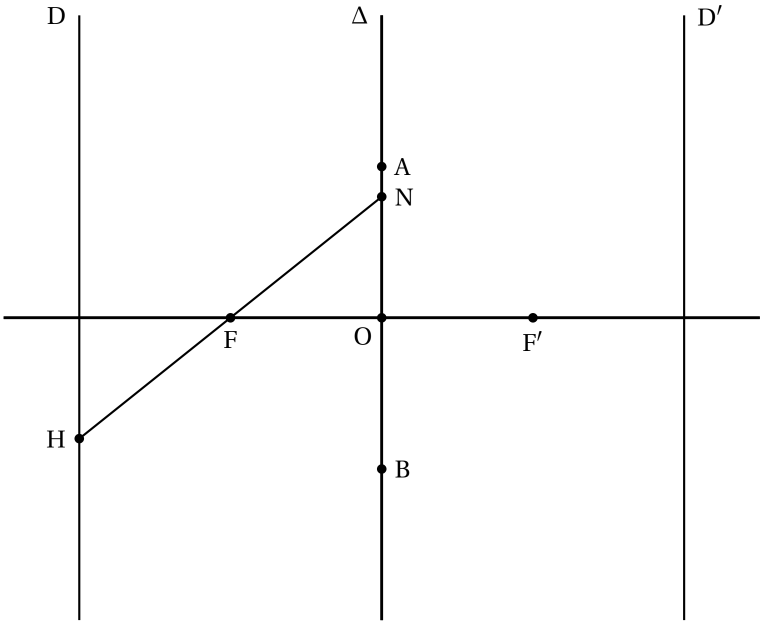
a. Montrer que pour tout point M du plan,

$$\mathrm{MH}^2 + \mathrm{MN}^2 = 2\left(\mathrm{MF}^2 + \mathrm{NF}^2\right).$$

b. En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant
$\mathrm{MH}^2 - 2\mathrm{MF}^2 = 0$.

3. On note K la projection orthogonale de H sur Δ et on pose α = ON où
$0 \leqslant \alpha \leqslant c$.
Exprimer NK en fonction de α, puis NF et NI en fonction de α et de c.
En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2 distincts ou confondus.

4. Prouver que $\dfrac{\mathrm{M}_{1\mathrm{F}}}{\mathrm{M}_{1\mathrm{H}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
En déduire que lorsque N parcourt le segment [AB], les points M_1 et M_2 appartiennent à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F. Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.



PROBLÈME **11 points**

Soit k un nombre réel. On considère la fonction f_k définie sur $[0~;~1]$ par :

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \quad si\ x > 0 \quad \text{et } f_k(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 10 cm).
On note I, J et L les points de coordonnées respectives $(1~;~0)$, $(0~;~1)$ et $(1~;~1)$.

Partie 1 - Étude des fonctions f_k

A. Dans cette question $k = 0$. Étude et représentation de f_0.

1. **Signe de la dérivée**
   a. Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur $]0~;~1]$ et montrer que $f_0'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

   $$f_0(x) = (\ln x)(\ln x + 2).$$

   b. Déterminer les solutions de l'équation $f_0(x) = 0$ sur $]0~;~1]$.
   c. Étudier le signe de $f_0'(x)$ sur $]0~;~1]$.
2. **Étude à l'origine**
   a. Déterminer la limite de $\dfrac{\ln u}{\sqrt{u}}$ puis de $\dfrac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que $x(\ln x)^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0, puis que f_0 est continue en 0.
   c. Déterminer la limite de $\dfrac{f_0(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.
   En déduire la tangente en O à la courbe $\mathscr{C}_0$.
3. **Tracé de la courbe $\mathscr{C}_0$**
   a. Dresser le tableau des variations de f_0.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_0$.

B. Étude de f_k

1. **Dérivée de f_k**
   - **a.** Calculer $f_k(x)$ sur $]0\,;\,1]$.
   - **b.** Soit A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point A_k est la droite (OA_k).
2. **Étude à l'origine**
   - **a.** Établir que f_k est continue en 0.
   - **b.** Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_k$ en O.
     On ne demande pas d'étudier les variations de f_k.

C. Étude et représentation de f_1 et $f_{1/2}$

1. **Étude de f_1 et tracé de $\mathcal{C}_1$**
   - **a.** Prouver que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.
   - **b.** Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   - **c.** Établir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_0$ en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_1$ au point A_1.
2. **Étude de $f_{1/2}$ et tracé de $\mathcal{C}_{1/2}$**
   - **a.** Prouver que pour tout $x \in [0\,;\,1]$,
     $$f_{1/2}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$
   - **b.** En déduire une construction de $\mathcal{C}_{1/2}$ à partir de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ et tracer $\mathcal{C}_{1/2}$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ en précisant la tangente $T_{1/2}$ à $\mathcal{C}_{1/2}$ au point $A_{1/2}$.

Partie II - Partage du carré OILJ en quatre parties de même aire

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.

1. **Calcul d'une intégrale**
   On pose : $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Prouver, en effectuant une intégration par parties, que :
     $$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \int_\alpha^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$
   - **b.** En effectuant à nouveau une intégration par parties prouver que :
     $$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$
   - **c.** Déterminer la limite I de $I(\alpha)$ lorsque αtend vers 0.
2. **Calcul d'aires**
   - **a.** On pose : $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
     Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α. En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0.
     On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_k$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$.
   - **b.** En déduire que les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{1/2}$ et $\mathcal{C}_1$ partagent le carré OIU en quatre parties de même aire.