CHAPITRE 2. L’INCONNUE DU POURCENTAGE

Problème N°1 Le brevet des collèges

a) Compléter le tableau qui concerne le brevet des collèges des trois collèges d'une ville.
Si nécessaire arrondir les pourcentages à 1 % près.

	collège A	collège B	collège C
Nombre de candidats	120	320	
Nombre de candidats reçus		224	48
Pourcentage de reçus	75 %		80 %

b) Quel est le pourcentage de reçus au brevet dans cette ville ?

c) Dans le collège A, il y avait 60 % de filles parmi les candidats et il y a eu 63 filles reçues.
Quel est le pourcentage de reçues parmi les filles du collège A ?
Quel est le pourcentage de reçus parmi les garçons du collège A ?

d) Parmi les 320 candidats (et candidates) du collège B, il y a 65 % de demi-pensionnaires dont 112 garçons.
Parmi les filles candidates du collège B, 60 % sont demi-pensionnaires.
Combien y a-t-il de filles candidates du collège B ? Et combien de garçons candidats ?

e) Dans le collège B, 120 filles ont été reçues.
Quel est le pourcentage de reçues parmi les filles du collège B ?
On tire au hasard la fiche d’un garçon du collège B. Quelle est la probabilité qu’il ait été reçu ?

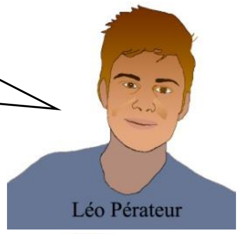
Tu peux chercher par toi-même ou t’inspirer des méthodes ci-dessous.

J’aime bien faire des dessins pour comprendre la situation.

Il y a peut-être une traduction géométrique de la situation.

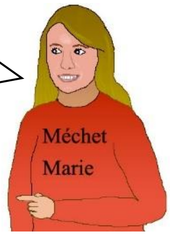
Les pourcentages, c’est une affaire de proportion.

Trouver le bon opérateur c’est souvent la clef du problème.



Avec un tableau de proportionnalité pour traduire la situation, le problème est vite résolu.

On peut représenter le collège par un rectangle et les sous-ensembles par des rectangles en couleur.



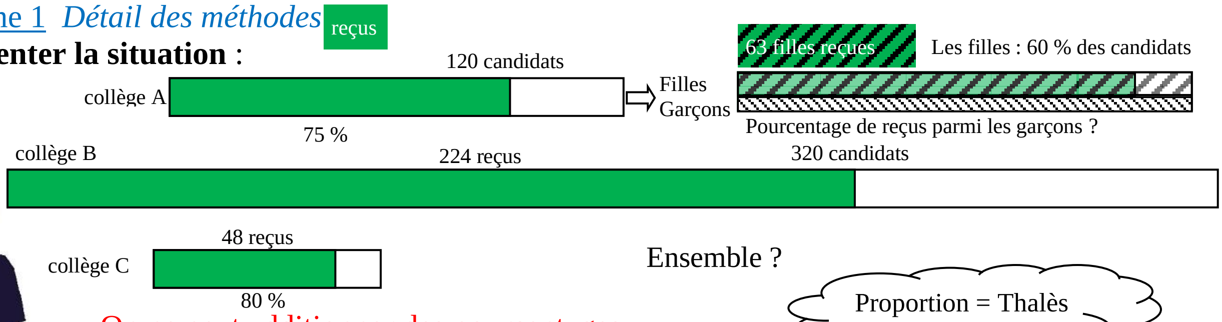
***Après avoir cherché par toi-même**, puis avoir échangé avec tes voisins s’il s’agit d’un travail de groupe, tu peux regarder les pages suivantes où les méthodes sont détaillées.*

Compare ces méthodes et assure-toi qu’elles donnent les mêmes résultats.

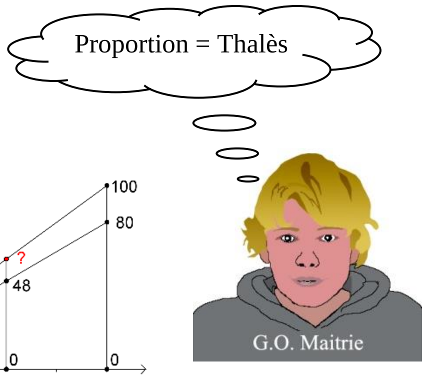
Dans les pages suivantes, tu trouveras une grande quantité de problèmes où tu pourras réutiliser ces méthodes, puis une synthèse sur les notions mathématiques utilisées ici.

Problème 1 *Détail des méthodes*

Représenter la situation :

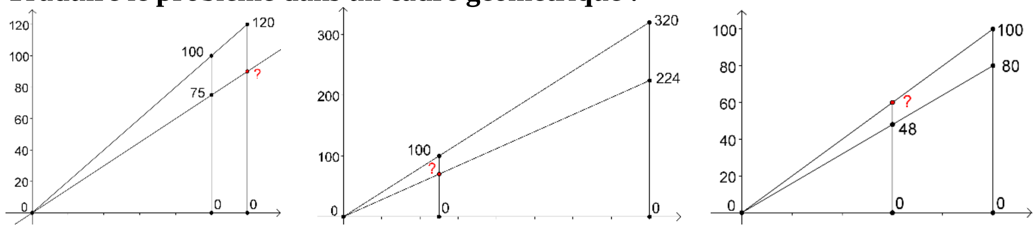


Ensemble ?



On ne peut additionner des pourcentages
que s'ils ont la même référence (les 100 %).

Traduire le problème dans un cadre géométrique :



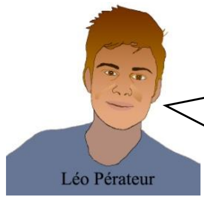
Déterminer des proportions :

Collège A : $\frac{?}{120} = \frac{75}{100}$ Collège B : $\frac{224}{320} = \frac{?}{100}$ Collège C : $\frac{48}{?} = \frac{80}{100}$

Ensemble : $\frac{?+224+48}{120+320+?} = \frac{?}{100}$

Calcul faux : $\frac{75\%+?\%+80\%}{3}$

car ce n'est pas la même référence.



Je marque l'opérateur de la ligne du tout vers celle de la partie.

Tableaux et opérateurs :

Collège A	élèves	%
Reçus	a = ?	75
Total	120	100

× ?

Collège B	élèves	%
	224	
	320	100

× ?

Collège C	élèves	%
	48	80
		100

: ? × ?

A, B, C	élèves	%
		100

× ?

J'utilise la même couleur pour des pourcentages qui ont la même référence.

Collège A	Filles 60 %	%	Garçons 40 %	%	Total 100 %
Reçu(e)s	63				a =
Candidat(e)s		100 %		100 %	120

Réaliser un schéma :

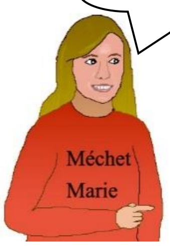
Collège A

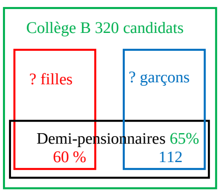
120 candidats — 60 % → ……. filles —? %→ 63 reçues

120 candidats → …. garçons —? %→ …... reçus

}….. reçus

Les schémas utilisent les mêmes couleurs que les tableaux.

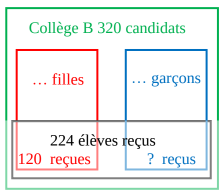




Collège B	Filles	%	Garçons	%	Total
Demi-pensionnaires 65 %		60 %	112		
Candidat(e)s 100 %		100 %	b = ?	100 %	320

Collège B	Filles	%	Garçons	%	Total
Reçu(e)s	120				224
Candidat(e)s 100 %		100 %	b =	100 %	320

La probabilité est égale à la fréquence exprimée sous forme décimale.



Le premier problème ne fait appel qu'à des pourcentages de répartition, donc des pourcentages proportions. Le corrigé est page 26. Le problème suivant propose une variété de types de pourcentages, avec des augmentations et des diminutions.
Les méthodes ci-dessus restent utilisables, mais ne seront pas toujours détaillées.

<u>Problème N°2</u> Les soldes

Quelle est ta méthode pour résoudre les problèmes de pourcentages ?
Explique ta façon de calculer pour chaque question.

a) Une chemise étiquetée 60 € bénéfice d'une réduction de 15 %. Quelle est la valeur de la réduction ?
b) Lors des soldes, tu achètes un blouson étiqueté 250 € mais tu as droit à une réduction de 40 %. Combien vas-tu payer ce blouson ?
c) Sur le marché, un pull est affiché à 54 €, le vendeur te fait une remise de 4 €. Quel est le pourcentage de la remise ?
d) Dans un autre magasin, tu payes 132 € un pantalon dont l'ancien prix était 165 €. Quel était le pourcentage de la remise ?
e) Le prix des sweatshirts a augmenté de 16 % par rapport à l'an dernier. Combien est vendu le sweatshirt que tu avais acheté 25 € l'an dernier ?
f) Le sac qui est affiché 45 € Hors Taxe est vendu 48,60 € Toute Taxe Comprise. Quel est le pourcentage de la taxe par rapport au prix Hors Taxe de ce sac ?
g) Dans une enquête sur un produit, 90 personnes, soit 72 % des personnes interrogées, ont dit qu'elles étaient satisfaites de la présentation du produit. Combien de personnes ont été interrogées ?
h) Grâce à une remise de 30 %, tu as payé un costume 210 €. Quel était l'ancien prix de ce costume ?
i) Le prix Toute Taxe Comprise d'un blouson est 67,20 €. La TVA représente 5 % du prix Hors Taxe. Le prix TTC est la somme du prix HT et de la TVA. Quel est le prix Hors Taxe de ce blouson ?

Classe les questions selon qu'il s'agit d'un pourcentage-proportion, pourcentage d'augmentation ou de diminution, et selon qu'il s'agit de trouver la valeur finale, la valeur initiale (la référence pour les 100%) ou le pourcentage.

Type de pourcentage \ Type de question	valeur initiale ou référence 100%	pourcentage ou taux	valeur finale ou partie
pourcentage proportion			a)
pourcentage d'augmentation			
pourcentage de diminution			

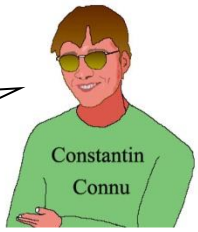
Voici quelques idées :

Je persiste à faire des dessins pour comprendre la situation.

Un bon schéma peut permettre de résoudre le problème.

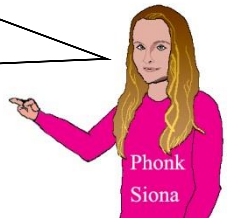
Avec les pourcentages, il est toujours question de proportion.

Les questions s'écrivent aussi sous forme d'équations.



Le tableau de proportionnalité reste un bon outil pour traduire la situation et résoudre le problème.

Utiliser les opérateurs revient à utiliser des fonctions linéaires.
Il y a une vraie ressemblance entre les deux méthodes.



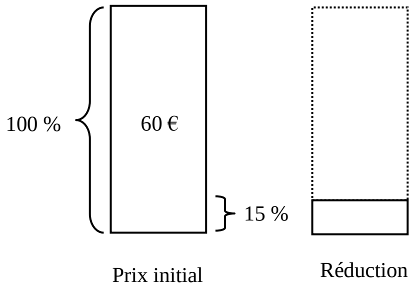
Les méthodes qui sont suggérées ici, sont développées dans les pages suivantes.
Ce qui importe, ce n'est pas d'abord le résultat, mais la méthode utilisée.

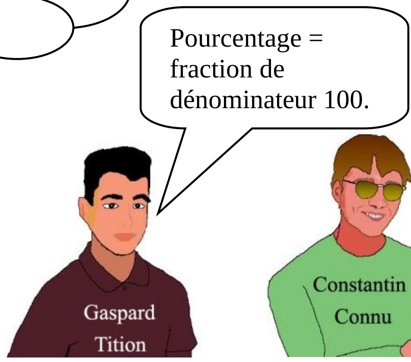
Tu peux choisir ta méthode, puis comparer les différentes méthodes, mais pour progresser, il va devenir utile de repérer les différentes types de situations et les différents types de questions.
C'est pourquoi, il est intéressant de compléter le tableau.

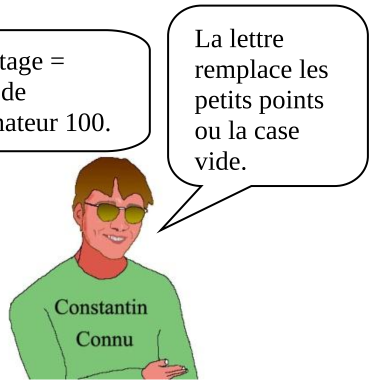
PROBLEME 2 *Détail des méthodes*

a) La réduction sur la chemise

Dessiner, représenter





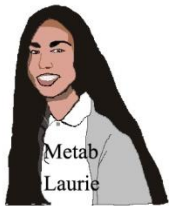


Faire un tableau de proportionnalité

	Prix initial	Réduction
Pourcentage	100	15
Valeur	60 €	

×

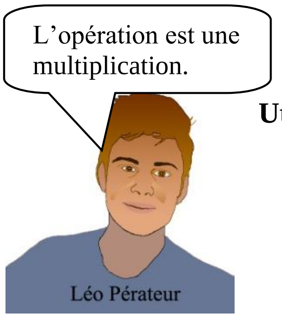
Ecrire des proportions égales



$$\frac{15}{100} = \frac{\dots}{60}$$

Résoudre une équation

$$\frac{15}{100} = \frac{y}{60}$$



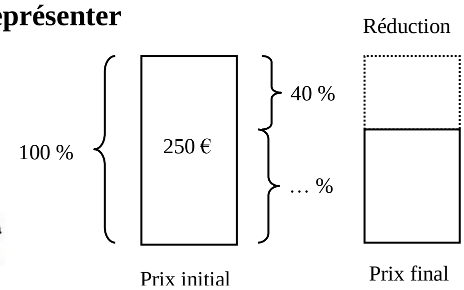
Utiliser un opérateur, un schéma

$$60\ € \xmapsto{15\ \%} \dots$$

×

b) Le nouveau prix du blouson

Dessiner, représenter



Proportions égales

$$\frac{40}{100} = \frac{\dots}{250}$$

$250 - \dots =$

Équations

$$\frac{40}{100} = \frac{r}{250}$$

$250 - r = y$

Faire un tableau de proportionnalité

	Prix initial	Réduction	Prix final
Pourcentage	100	40	
Valeur	250 €		

×

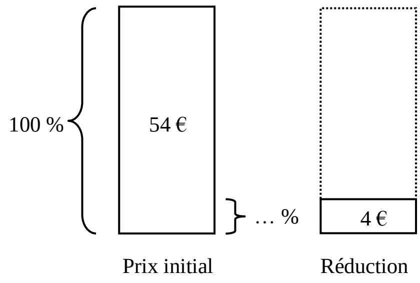
×

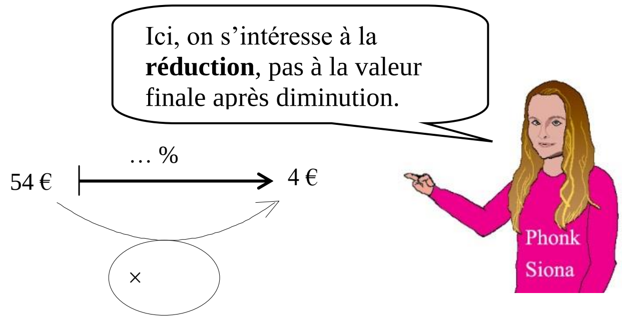
Utiliser un opérateur ou une fonction

$$250\ € \xmapsto{-\,40\ \%} \dots$$

×

c) Le pourcentage de la remise sur le pull.





	Prix initial	Réduction
Pourcentage	100	
Valeur	54 €	4 €

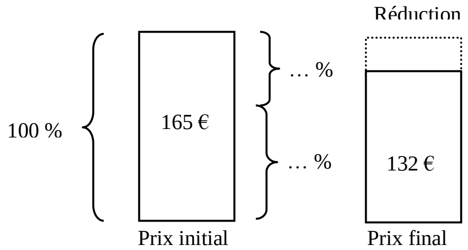
Proportions égales

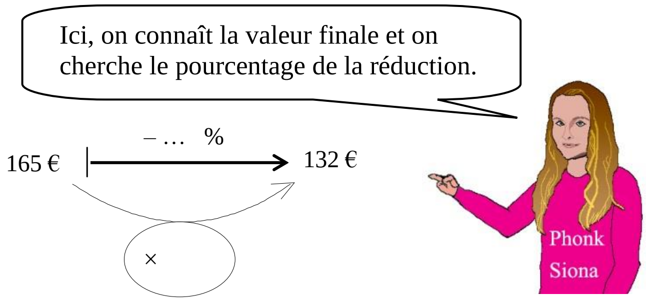
$$\frac{\dots}{100} = \frac{4}{54}$$

Équations

$$\frac{p}{100} \times 54 = 4$$

d) Le pourcentage de la remise sur le pantalon





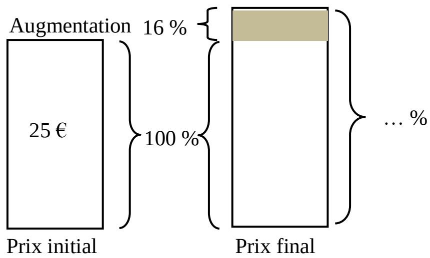
	Prix initial	Réduction	Prix final
Pourcentage	100		
Valeur	165 €		132 €

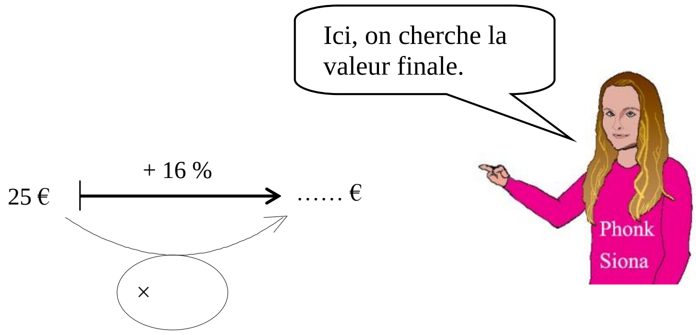
165 – 132 =

$$\frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{165}$$

$$165 - \frac{p}{100}165 = 132$$

e) Le nouveau prix du sweatshirt





	Prix initial	Augmentation	Prix final
Pourcentage	100	16	
Valeur	25 €		…… €

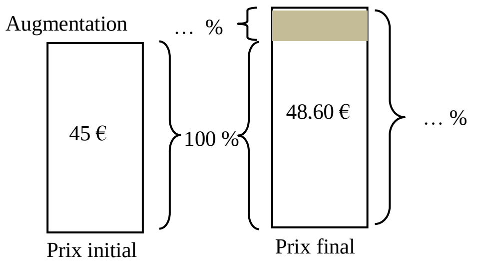
$$\frac{16}{100} = \frac{\dots}{25}$$

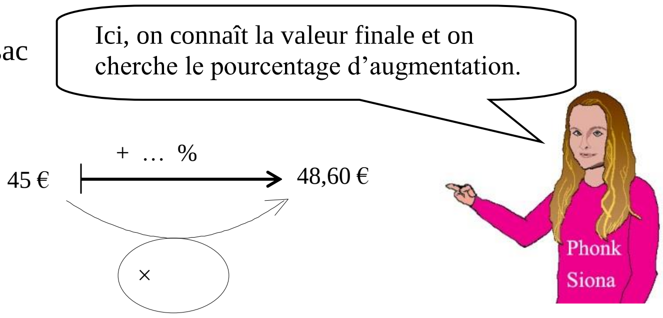
25 + … = …

$$\frac{16}{100} = \frac{A}{25}$$

$25 + A = y$

f) Le pourcentage de la taxe sur le prix HT du sac





	Prix initial	Augmentation	Prix final
Pourcentage	100	……	
Valeur	45 €		48,60 €

×

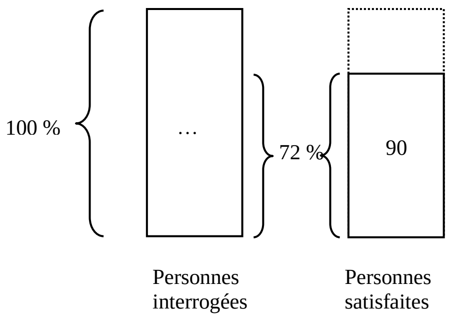
×

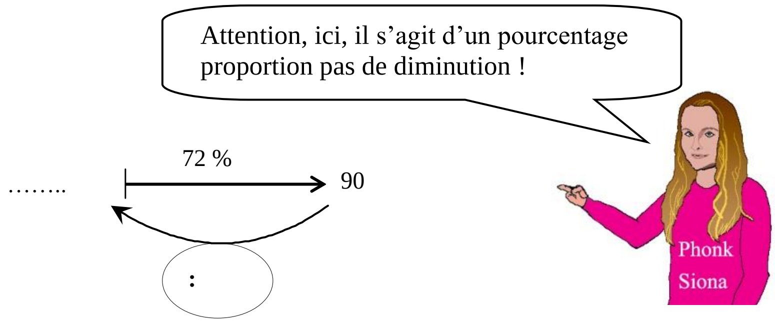
45 + … = 48,60

$$\frac{48{,}60-45}{45}=\frac{\dots}{100}$$

$$\frac{48{,}60}{45}=\frac{100+p}{100}$$

g) Le nombre de personnes interrogées





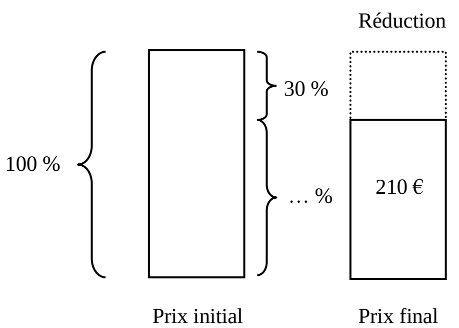
	Personnes interrogées	Personnes satisfaites
Pourcentage	100	72
Quantité		90

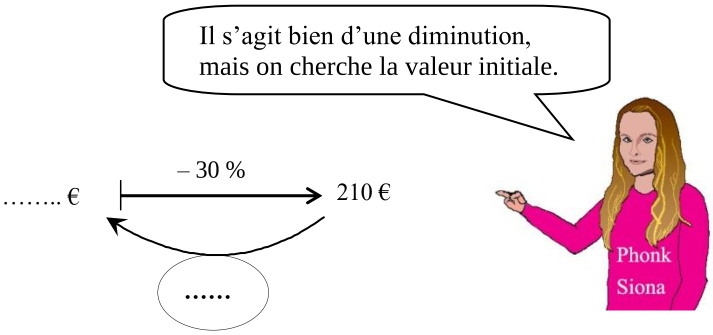
……

$$\frac{72}{100}=\frac{90}{\dots}$$

$$\frac{72}{100}=\frac{90}{x}$$

h) L'ancien prix du costume





×

	Prix initial	Réduction	Prix final
Pourcentage	100	30	
Valeur			210 €

:

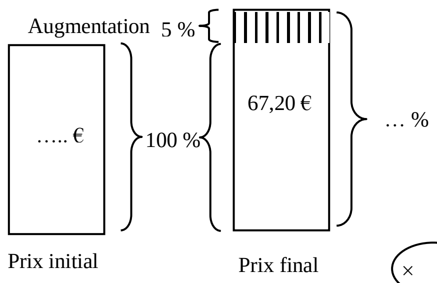
100 – 30 = …

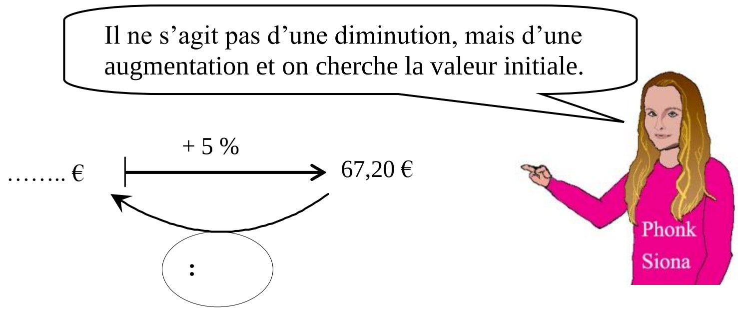
$$\frac{\dots}{100}=\frac{210}{\dots}$$

$$x-\frac{30}{100}x=210$$

i) Le prix HT du blouson

Le prix Toute Taxe Comprise d'un blouson est 67,20 €. La TVA représente 5 % du prix Hors Taxe.
Quel est le prix Hors Taxe de ce blouson ?





×

	Prix initial	Augmentation	Prix final
Pourcentage	100	5	
Valeur			67,20 €

:

100 + 5 = …

$\frac{\ldots}{100} = \frac{67{,}20}{\ldots}$

$x + \frac{5}{100}x = 67{,}20$

Synthèse

Les types de pourcentages envisagés ici sont :

- **les pourcentages proportions** (incluant les pourcentages de répartition),
- **les pourcentages d'augmentation** (qui font partie des pourcentages d'évolution),
- **les pourcentages de diminution** (qui font partie des pourcentages d'évolution).

Les types de questions sont :

- **trouver la valeur de la quantité observée** (ou valeur de la partie, ou valeur finale),
- **trouver le pourcentage *p*** (ou le taux $t = p\ \% = p/100$ ou le coefficient multiplicateur, qui définit la fonction),
- **trouver la référence des 100 %** (la totalité ou la valeur initiale).

Les types de méthodes proposées ici sont :

- **dessiner, schématiser** pour représenter la situation, **traduire géométriquement** le problème,
- **faire un tableau de proportionnalité**, **écrire des proportions égales**, **résoudre une équation,**
- **utiliser un opérateur** ou **une fonction linéaire.**

<u>Problème N°3</u> Le commerce

a) Un commerçant fait sur chacun de ses articles un bénéfice représentant 40% du prix de vente.
Quel est le bénéfice réalisé sur un article vendu 125 € ?
b) Dans les mêmes conditions que la question **a)**, quel est le prix d'un article sur lequel il réalise un bénéfice de 28 € ?
c) Jean achète une calculatrice dont le prix est 75 €. Le commerçant lui fait une remise de 15 €.
Exprimer cette remise en pourcentage.
d) Après une augmentation de 30 % un objet vaut 78 €. Combien valait-il avant cette augmentation ?
e) Un jeu valant 160 € est soldé 120 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

Classe les questions suivant les types de pourcentages et de questions (parfois plusieurs classements sont possibles).

Type de pourcentage \ Type de question	valeur initiale ou référence 100%	pourcentage ou taux	valeur finale ou partie
pourcentage proportion			
pourcentage d'augmentation			
pourcentage de diminution			

<u>Problème N°4</u> Les chiffres du cinéma

a) De l'année 2000 à l'année 2006, le nombre d'entrées au cinéma a augmenté de 14 % en France.
Il y a eu 166 millions d'entrées en l'an 2000 en France. Combien y en a-t-il eu en 2006 ?
b) Au Japon, il a eu 135 millions d'entrées en l'an 2000 et 165 millions en 2007.
Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'entrées au cinéma au Japon entre 2000 et 2007 ?
c) Au Royaume Uni, le nombre d'entrées au cinéma a augmenté de 10 % entre l'an 2000 et 2006.
Il y a eu 157 millions d'entrées en 2006 au Royaume Uni. Combien y en a-t-il eu en l'an 2000 ?

Problème N°5 La valse des prix aux Magasins Modernes

Jacques est magasinier aux Magasins Modernes.
Tous les prix et toutes les ventes sont enregistrés sur l'ordinateur de l'entreprise.

1) Pour connaître le pourcentage des ventes dans son secteur, il utilise le tableau suivant :

Référence	Réf.	B 70117	B 79684	B 92908	B 98544	B 94176	B 78679
Stock initial	S	20	85	62	61	104	74
Ventes	V	15	36	51	10	11	21
Prix unitaire	U	24,80	43,20	65,40	34,40	62,60	8,80
Quotient	Q	0,75	0,42	0,82	0,16	0,11	0,28

a) Quel est le pourcentage de produits vendus par rapport au Stock initial pour la référence B 70117 ?
b) Comment l'ordinateur calcule-t-il la cinquième ligne ? Donner une formule pour calculer Q.
c) Enoncer, sans calculer, les pourcentages de ventes par rapport au stock de chaque référence du tableau.
Remarque Les tableurs (comme EXCEL) peuvent afficher les nombres de la dernière ligne au format "pourcentage" en gardant en mémoire le quotient.

2) Au 1er octobre, tous les prix de ce secteur doivent être augmentés de 10 % et Jacques doit calculer les nouveaux prix.
a) Quel est le nouveau prix unitaire pour la référence B 70117 ?
b) Donner une formule pour calculer le nouveau prix unitaire N à partir de l'ancien U.
c) Béatrice dit à Jacques qu'une seule multiplication suffit pour passer de l'ancien prix au nouveau. Est-ce vrai ? Quel est ce coefficient multiplicateur ?
d) Quel serait le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 15 % ? de 5 % ? de 0,5 % ?
e) Quel serait le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de p % ?

Compléter la phrase :
Pour augmenter une quantité de *p* %, on multiplie cette quantité par (   )

3) À partir 1er novembre commence une période de solde, tous les prix de ce secteur doivent être diminués de 10 % et Jacques doit calculer les nouveaux prix.
a) Quel est le nouveau prix unitaire pour la référence B 70117 (en partant du prix du 2)a)) ?
b) Donner une formule pour calculer le nouveau prix unitaire R réduit de 10 % à partir de l'ancien prix N.
c) Quel serait le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 20 % ? de 30 % ? de 5 % ?

Compléter la phrase :
Pour diminuer une quantité de *p* %, on multiplie cette quantité par (   )

4) Comparaison de R et de U.
a) Le prix réduit R est-il égal au prix initial U ?
b) R est-il proportionnel à U (sans tenir compte des arrondis éventuels) ?
c) Quel pourcentage d'augmentation ou de diminution permet de passer de U à R ?
Conclusion :
Une augmentation de 10 % suivie d'une diminution de 10 % sur la nouvelle valeur redonne-t-elle la valeur initiale ?

Voici un problème avec différentes situations pour employer les méthodes et connaissances précédentes.

Problème N°6 Pourcentages dans tous les sens

a) Après une augmentation de 20 % par rapport à l'année précédente, la production d'une usine s'élève à 840 tonnes en 1991. Quelle était la production de cette usine en 1990 ?

b) Un canapé qui coûtait 550 € est soldé 385 €.
Quel est le pourcentage de la remise par rapport au prix initial ?

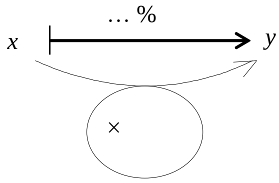
c) Sur chaque salaire brut, il est retranché 23,5 % de ce salaire brut pour la retraite, la mutuelle et la cotisation "maladie". Le salaire net est ce qui reste après ces déductions.
Quel est à 0,01 € près, le salaire brut d'une personne dont le salaire net est 1 000 € ?

d) Si la population mondiale est multipliée par 4. A quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

e) Comment peut-on calculer mentalement 25 % de 480 ?

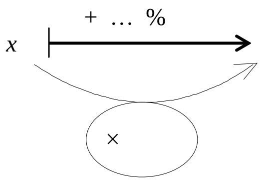
Problème N°7 Schéma et formules

a) Compléter le schéma et les formules correspondant à un pourcentage proportion, x est la quantité qui correspond au 100 % et y est la partie directement concernée pour le pourcentage p % avec le taux $t = \frac{p}{100}$.



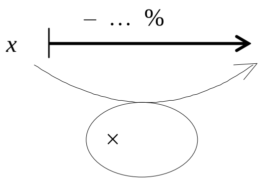
- Calcul de la partie à partir du tout : y = …
- Calcul du tout à partir de la partie : x = …
- Calcul du taux ou pourcentage : $t = \frac{p}{100} = \cdots$ et p = …….

b) Compléter le schéma et les formules correspondant à un pourcentage d'augmentation, x est la valeur initiale et la référence des 100 % et y est la valeur finale après augmentation de p % avec le taux $t = \frac{p}{100}$.



- Calcul de la valeur finale : y = …
- Calcul de la valeur initiale : x = …
- Calcul du taux ou pourcentage : $t = \frac{p}{100} = \cdots$ et p = …….

c) Compléter le schéma et les formules correspondant à un pourcentage de diminution, x est la valeur initiale et la référence des 100 % et y est la valeur finale après diminution de p % avec le taux $t = \frac{-p}{100}$.



- Calcul de la valeur finale : y = …
- Calcul de la valeur initiale : x = …
- Calcul du taux ou pourcentage : $t = -\frac{p}{100} = \cdots$ et p = …….

Réponses dans le cours pages 28 *et* 29.

Problème N°8 Au lycée

a) Dans un lycée, il y avait 40 élèves candidats au bac en STMG communication et 65 en STMG Gestion. Les pourcentages de réussite sont de 70 % en STMG communication et 80 % en STMG Gestion.

Quel est le pourcentage de réussite dans ce lycée pour l'ensemble de la section STMG ?

b) L'intendant du lycée a payé à la Boucherie Sanzot une facture de 422 €, taxe comprise.
Sachant que la T.V.A. est de 5,5 % sur ce produit, calcule le prix hors taxe correspondant à cette facture puis calcule la valeur de la TVA.

Problème N°9 Évolution réciproque

a) Si le prix d'un litre de carburant augmente de 1,20 € à 1,38 €, cela correspond à quel pourcentage d'augmentation ?

b) Si le prix d'un litre de carburant diminue de 1,38 € à 1,20 €, cela correspond à quel pourcentage de diminution ?

c) Une table est vendue 273 € TTC. La TVA représente 5 % du prix Hors Taxe.

Quel est le prix Hors Taxe de cette table ? Comment le calculer à partir du prix TTC en une opération ?

Problème N°10 Encore des réductions

a) Une personne achète une chaîne hi-fi-marqué 280 €. Le commerçant lui fait une remise de 30 €. Exprimer cette remise en pourcentage.

b) Un article marqué 275 € est soldé 220 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

c) Après une réduction de 25 %, une veste en toile est vendue 60 €, quel était son prix avant la réduction ?

REPONSES

Problème 1 Le brevet des collèges page 17

a) Il y a $\frac{75}{100} \times 120 = 90$ reçus dans le collège A. Ainsi $a = 90$ pour la question c).

Le taux de reçus du collège B est : $\frac{224}{320} = 0{,}70 = 70\%$.

Dans le collège C, le nombre de candidats est $\frac{48}{0{,}80} = 60$.

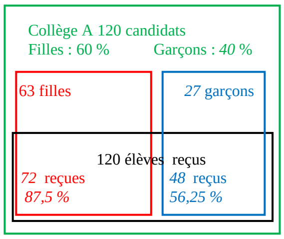
b) Le taux de reçus pour les trois collèges est $\frac{90+224+48}{120+320+60} = \frac{362}{500} = 0{,}724 \approx \mathbf{72}\ \%\ \neq \frac{75\%+70\%+80\%}{3}$.

c) Il y avait 60 % de filles parmi les 120 candidats du collège A soit 0,60 × 120 = 72 filles.

Le taux de reçues parmi les filles est donc $\frac{63}{72} = 0{,}875 = 87{,}5\ \%$.

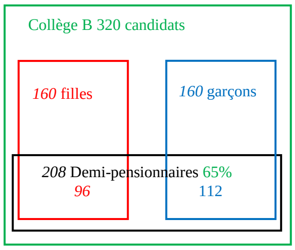
Par ailleurs, il y avait 120 – 72 = 48 garçons dont 90 – 63 = 27 reçus.

Le taux de reçus parmi les garçons est donc $\frac{27}{48} = 0{,}5625 \approx 56\ \%$.



Collège A	Filles 60 %	%	Garçons 40 %	%	Total 100 %
Reçu(e)s	63	***87,5 %***	*27*	***56,25 %***	*a = 90* (question a)
Candidat(e)s	***72***	100 %	*48*	100 %	120

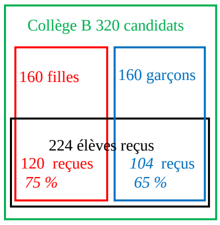
d) Parmi les 320 candidats du collège B, il y a 65 % de demi-pensionnaires soit 0,65 × 320 = 208 demi-pensionnaires dont 112 garçons et 208 – 112 = 96 filles.
Or les demi-pensionnaires représentent 60 % des filles donc,
le nombres de filles candidates est $\frac{96}{60} \times 100 = 160$ ou $\frac{96}{0{,}60} = 160$.



Collège B	Filles	%	Garçons	%	Total
Demi-pensionnaires 65 %	*96*	60 %	112		*208*
Candidat(e)s 100 %	***160***	100 %	*b = 160*	100 %	320

e) Le taux de reçus parmi les filles est $\frac{120}{160} = 0{,}75 = 75\ \%$.

Parmi les 224 reçus, il y a 120 filles et donc 224 – 120 = 104 garçons reçus.
D'après la question précédente, il y a 320 – 160 = 160 garçons au collège B.
Le taux de reçus parmi les garçons est donc $\frac{104}{160} = 0{,}65 = 65\ \%$.
Si on tire au hasard la fiche d'un garçon du collège B, la probabilité qu'il ait été reçu sera donc 0,65.



Collège B	Filles	%	Garçons	%	Total
Reçu(e)s	120	***75 %***	*104*	***65 %***	224
Candidat(e)s 100 %	160	100 %	*b* = 160	100 %	320

Problème 2 Les soldes page 19

a) Une chemise étiquetée 60 € bénéfice d'une réduction de 15 %.
La réduction est de 0,15 × 60 = **9 €**.

b) Le blouson étiqueté 250 € avec une réduction de 40 % blouson coûtera 250 × 0,6 = **150 €**.

c) Le taux de la remise de 4 € sur un pull affiché à 54 € est 4/54 ≈ 0,074 = **7,4 %**.

d) Le prix final du pantalon est 132 € et l'ancien prix était 165 €, or $\frac{132-165}{165} = -0{,}20$

donc la remise était de **20 %**.

e) Après une augmentation de 16 %, le prix des sweatshirts à 25 € est 25 × 1,16 = **29 €**.

f) Le sac qui est affiché 45 € Hors Taxe est vendu 48,60 € Toute Taxe Comprise.
Le pourcentage de la taxe par rapport au prix Hors Taxe est $\frac{48{,}60-45}{45} = 0{,}08$ soit **8 %** du prix HT.

g) 90 personnes, soit 72 % des personnes interrogées, ont dit qu'elles étaient satisfaites de la présentation du produit, donc 90 / 0,72 = **125** personnes ont été interrogées.

h) Le prix final du costume est 210 € après une remise de 30 % donc était l'ancien prix de ce costume était $\frac{210}{0,70}$ = **300 €**.

i) Le prix Toute Taxe Comprise d'un blouson est 67,20 €. La TVA représente 5 % du prix Hors Taxe.
Le prix Hors Taxe de ce blouson est 67,20/1,05 = 64 €.

Type de pourcentage \ Type de question	valeur initiale ou référence 100%	pourcentage ou taux	valeur finale ou partie
pourcentage proportion	g)	c)	**a)**
pourcentage d'augmentation	i)	f)	e)
pourcentage de diminution	h)	d)	b)

Problème 3 Le commerce page 23

a) 50 € b) 70 € c) 20 % d) 60 € e) $\frac{120-160}{160} = -0{,}25$. La réduction est de **25 %**.

Type de pourcentage \ question	valeur initiale ou référence	Pourcentage ou taux	valeur finale ou partie
pourcentage proportion	**b)**	**c)**	**a)**
pourcentage d'augmentation	**d)**		
pourcentage de diminution		**e)**	

Problème 4 Les chiffres du cinéma page 23

a) $166 \times 1{,}44 = 189{,}24$ millions. **b)** 30/135 ≈ 0,222 soit environ 22 % **c)** 157/1,10 ≈ 143 millions.

Problème 5 La valse des prix aux Magasins Modernes page 24

1) a) 75 % b) $Q = V/S$ **c) 75 %, 42 %, 82 %, 16 %, 11 %, 28 %**.

2) Au 1er octobre, tous les prix de ce secteur doivent être augmentés de 10 %.

a) Le nouveau prix unitaire est : $24{,}80 + \frac{10 \times 24{,}80}{100} = 24{,}80 + 2{,}48 =$ **27,28** ou directement 24,80 × 1,10 = **27,28**

b) Le nouveau prix unitaire N est : $N = U + \frac{10}{100} \times U = U + 0{,}1 \times U = 1{,}10 \times U = \mathbf{1{,}10\ U}$.

c) Le calcul ci-dessus prouve qu'une seule multiplication par 1,10 suffit pour passer de l'ancien prix au nouveau.

d) Le coefficient multiplicateur pour une augmentation de 15 % est **1,15**, de 5 % est **1,05**, de 0,5 % est **1,005**.

e) Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de p % est $\mathbf{1 + \frac{p}{100}}$.

3) Tous les prix de ce secteur doivent être diminués de 10 % et Jacques doit calculer les nouveaux prix.

a) Le nouveau prix unitaire est $27{,}28 - \frac{10 \times 27{,}28}{100} = 27{,}28 - 2{,}728 =$ **24,552** (arrondi à **24,55**)

b) Le nouveau prix unitaire R réduit de 10 % à partir de l'ancien prix N est $\mathbf{R} = N - 0{,}10\ N = \mathbf{0{,}9\ N}$

c) Le coefficient multiplicateur pour une diminution de 20 % est **0,80**, de 30 % est **0,70**, de 5 % est **0,95**.

Pour diminuer une quantité de p %, on multiplie cette quantité par $\left(\mathbf{1 - \frac{p}{100}} \right)$

4) a) Non b) R **est** proportionnel à U (sauf arrondis éventuels) car $\mathbf{R = 0{,}9\ N = 0{,}9 \times 1{,}1\ U = 0{,}99\ U}$.

c) De U à R le prix subit une **diminution de 1 %**.

Une augmentation de 10 % suivie d'une diminution de 10 % sur la nouvelle valeur ne redonne pas la valeur initiale.

Problème 6 Pourcentages dans tous les sens page 24

a) $700 \xrightarrow{+\ 20\ \%} 840$ **b)** $550 \xrightarrow{-\ 30\ \%} 385$ **c)** $1307{,}19 \xrightarrow{-\ 23{,}5\ \%} 1000$ **d)** $x \xrightarrow{+\ 300\ \%} 4\,x$

e) Calculer 25 %, c'est multiplier par 25/100 qui vaut 1/4, donc il suffit de diviser 2 fois par 2.

Problème 8 Au lycée page 25

(Les réponses du problème 7 sont pages 28 et 29)

a) Le nombre de reçus est 0,7 × 40 + 0,8 × 65 = 80 sur 40 + 65 = 105 candidats soit 80/105 ≈ 0,762 = 76,2%.

b) $400 \xrightarrow{+\ 5{,}5\ \%} 422$ car 422/1,055 = 400.

Problème 9 Évolution réciproque page 25

a) $1{,}20 \xrightarrow{+\ 15\ \%} 1{,}38$ **b)** $1{,}38 \xrightarrow{-\ 13\ \%} 1{,}20$ **c)** On divise le prix TTC par 1,05. $260 \xrightarrow{+\ 5\ \%} 273$

Problème 10 Encore des réductions page 25

a) 30/280 ≈ 0,107 soit 10,7 %. **b)** $\frac{220-275}{275} = -0{,}2$ c'est une remise de 20 %.

c) $80 \xrightarrow{-\ 25\ \%} 60$ car 60 / 0,75 = 80.

SYNTHÈSE : FONCTIONS POURCENTAGES

I Pourcentages directs (de proportion ou de répartition).

Calculer le pourcentage d'une quantité par rapport à une autre, c'est trouver la valeur de cette quantité pour obtenir la même **proportion** en supposant que la référence soit égale à 100.
En fait, il s'agit simplement de calculer la proportion d'une quantité par rapport à une autre.

Exemple
Dans un lycée, il y a 725 élèves dont 348 garçons. Quel est le pourcentage des garçons parmi les élèves ?
On peut bien sûr réaliser un tableau de proportionnalité et chercher le nombre qui manque :

	Effectif	Pourcentage
Garçons	348	
Total	725	100

Il revient au même de résoudre l'équation $\frac{p}{100} = \frac{348}{725}$

La proportion est $\frac{348}{725} = 0{,}48 = \frac{48}{100}$.

On voit que le calcul du rapport donne le pourcentage demandé à condition d'interpréter 0,48 comme 48 %, c'est pourquoi on note 0,48 = 48 %. En statistique, 0,48 est la fréquence des garçons parmi les élèves du lycée. On peut aussi dire que sur 100 élèves de ce lycée, il y a 48 garçons. Il faut bien noter qu'**un pourcentage exprime une proportion et n'a de sens que si on précise quelle est la référence qui correspond aux 100 %.**
Remarquer aussi que les calculs tombent rarement "justes" et qu'il faudra souvent arrondir le résultat, la précision peut varier selon le contexte (à 1 % près, ou 0,1 % près...).
Dans les calculs ultérieurs, il faut reprendre le quotient exact pour éviter de cumuler les erreurs d'arrondi.

Cas général
On peut considérer le tableau suivant :

	Effectif	Pourcentage
Partie	y	p
Total	x	100

ce qui revient à l'égalité :

$$\frac{y}{x} = \frac{p}{100} = t$$

Schématiquement :

$$x \xrightarrow[\times t]{p\,\%} y$$

avec $t = \frac{p}{100}$

et $\frac{y}{x} = \frac{p}{100}$

- Calcul de la partie à partir du tout : $y = \frac{p}{100}x$
- Calcul du tout à partir de la partie : $x = \frac{y}{t}$
- Calcul du taux ou pourcentage : $t = \frac{p}{100} = \frac{y}{x}$ et $p = \frac{y}{x} \times 100$

II Pourcentages d'augmentation

Pour augmenter une quantité de p %, on multiplie cette quantité par $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ autrement dit par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

On peut considérer le tableau suivant :

	Effectif	Pourcentage
Valeur finale	y	$100 + p$
Valeur initiale	x	100

ce qui revient à l'égalité :

$$\frac{y}{x} = \frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$$

Schématiquement :

$$x \xrightarrow[\times (1+t)]{+\,p\,\%} y$$

avec $t = \frac{p}{100}$
x = valeur initiale
y = valeur finale

- Calcul de la valeur finale : $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$
- Calcul de la valeur initiale : $x = \frac{y}{1+t}$
- Calcul du taux ou pourcentage d'augmentation : $t = \frac{p}{100} = \frac{y}{x} - 1 = \frac{y-x}{x}$ et $p = \frac{y-x}{x} \times 100$

Exemple
Un DVD coûte 20 € Toute Taxe Comprise, la TVA est de 15 % sur le prix Hors Taxe. Quel est le prix HT de ce DVD ?

On cherche l'antécédent à l'aide du schéma :

$$x \xrightarrow[\times (1+0{,}15)]{+\,15\,\%} 20$$

Le prix HT de ce DVD est 20/1,15 ≈ 17,39 € et non pas $20 - \frac{15}{100}20$
car les 15 % portent sur x et non pas sur 20.
Rechercher la valeur initiale avant une hausse de 15 % ne revient pas à appliquer une diminution de 15 % sur la valeur finale.

III Pourcentages de diminution

Diminuer une quantité de p % c'est la multiplier par $\left(\frac{100-p}{100}\right)$ autrement dit par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

	Effectif	Pourcentage
Valeur finale	y	$100 - p$
Valeur initiale	x	100

$$\frac{y}{x} = \frac{100-p}{100} = 1 - \frac{p}{100}$$

Schématiquement :

$$x \xrightarrow[\times(1-p/100)]{-p\,\%} y$$

avec $t = \frac{-p}{100}$

t est négatif

x = valeur initiale

y = valeur finale

- Calcul de la valeur finale : $y = \left(1-\frac{p}{100}\right)x$
- Calcul de la valeur initiale : $x = \frac{y}{1-p/100}$
- Calcul du taux : $t = \frac{-p}{100} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$
- Calcul du pourcentage de diminution : $p = -\frac{y-x}{x} \times 100$

Remarque : Le taux d'évolution t est toujours égal à $\frac{valeur\ finale\ - valeur\ initiale}{valeur\ initiale}$

S'il est positif, il s'agit d'une augmentation, s'il est négatif, il s'agit d'une diminution.

Exemple

Un DVD coûte 18 € après une remise de 25 % sur le prix initial. Quel était le prix de ce DVD avant la remise ?

Il ne faut pas ajouter 25 % du prix final, puisque les 25 % doivent s'appliquer sur le prix initial.

On peut utiliser une équation : $x - \frac{25}{100}\,x = 18$ c'est-à-dire $0{,}75\,x = 18$,

ou plus directement, rechercher l'antécédent à l'aide du schéma : $x \xrightarrow[\times(1-0{,}25)]{-25\,\%} 18$.

Ainsi le prix initial de ce DVD est 18/0,75 = **24 €**

On n'obtient pas le bon résultat si on augmente le prix final de 25 %, cela donnerait $18 + \frac{25}{100}18 = 22{,}5$.

IV Conclusion

Les types de pourcentages envisagés ici sont :

- **les pourcentages proportions** (incluant les pourcentages de répartition),
- **les pourcentages d'augmentation** (qui font partie des pourcentages d'évolution),
- **les pourcentages de diminution** (qui font partie des pourcentages d'évolution).

Les types de questions sont :

- **trouver la valeur de la quantité observée** (ou valeur de la partie, ou valeur finale),
- **trouver le pourcentage *p*** (ou le taux $t = p\,\% = p/100$ ou le coefficient multiplicateur, qui définit la fonction),
- **trouver la référence des 100 %** (la totalité ou la valeur initiale).

Les types de méthodes proposées ici sont :

- **dessiner, schématiser** pour représenter la situation, **traduire géométriquement** le problème,
- **faire un tableau de proportionnalité**, **écrire des proportions égales**, **résoudre une équation,**
- **utiliser un opérateur** ou **une fonction linéaire.**

Attention :

On ne peut additionner des pourcentages que s'ils ont la même référence.

Chercher la valeur initiale avant une augmentation de *p* % ne consiste pas à diminuer la valeur finale de *p* %.
Et chercher la valeur initiale avant une diminution de *p* % ne consiste pas à augmenter la valeur finale de *p* %.
Une augmentation de 10 % suivie d'une diminution de 10 % sur la nouvelle valeur ne redonne pas la valeur initiale.

Il faut donc bien repérer si la situation correspond à une augmentation ou une diminution.

Il faut aussi distinguer ces pourcentages du calcul direct de la valeur de l'augmentation ou de celle du rabais, qui sont des pourcentages proportions.

Le pourcentage de répartition donne les proportions de chacun des constituants d'un tout, ainsi il ne peut dépasser 100 %.

Enfin, une diminution de plus de 100 % est difficile à interpréter (si cela a un sens).

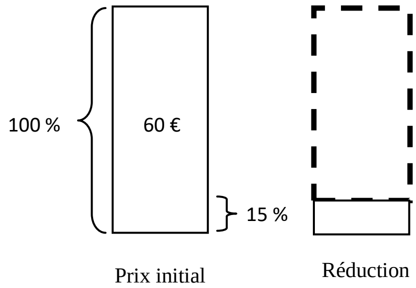
Il faut noter aussi qu'aucun pourcentage d'évolution ne peut se calculer à partir d'une valeur nulle.

SYNTHÈSE SUR LES METHODES

Les explications renvoient à des problèmes traités : le premier numéro indique le problème et le second la page des indications adaptées. (Pb1/P2) signifie renvoie au problème 1 page 2.

1. Dessiner, représenter

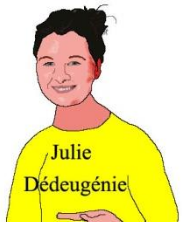
Voici une façon d'utiliser les dessins pour le problème 2 (Pb2/P20).



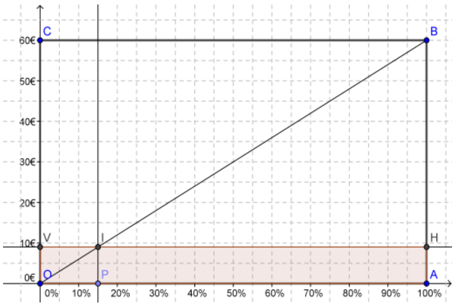
J'aime bien faire des dessins pour comprendre la situation.

L'idéal ce serait que les rectangles soient à l'échelle.
Il n'y aurait plus qu'à mesurer !

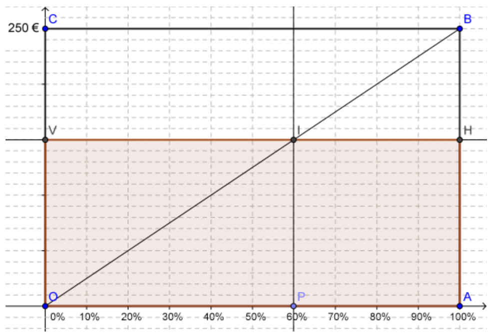
Et si on mettait les pourcentages en largeur ?



Sinclair : Ici, pour la question a), on peut prendre 60 mm pour la hauteur. La largeur est libre.
Marie : Disons que la largeur est une unité.
Julie : Et si on mettait les pourcentages en largeur, on peut prendre 100 mm.
Marie : Dans ce cas, il est facile d'indiquer les 15 %.
Sinclair : Oui, mais je voudrais trouver **la hauteur** qui correspond à 15 %.
Julie : Justement, relie le coin en bas à gauche, qui représente 0 % et 0 € au coin en haut à droite, qui représente 100 % et 60 €. Trace la droite verticale qui représente 15 %, elle croise la diagonale juste à la hauteur voulue.



Sinclair : Par Thalès, c'est évident !
Marie : Et pour les autres questions ?
Sinclair : Il suffit de placer d'abord I ou B selon les données de l'exercice.
Marie : Mais pour le prix final après une réduction de 40 % ?
Julie : Il suffit d'enlever les 40 % au 100 %.
Marie : La seule difficulté, c'est de choisir une unité pratique pour la hauteur.
Sinclair : Et puis, la méthode ne donne qu'une valeur approximative en mesurant.
Pour avoir la valeur exacte, il reste à calculer.



Julie : Oui, mais 60 %, c'est-à-dire 0,60, donne le coefficient multiplicateur à appliquer à 250.
Sinclair : Mais si on ne connaît pas le pourcentage ?
Marie : Dans la question (c), la référence c'est le prix initial donc 54 € correspond à 100 %, et le rapport 4 sur 54 donne le pourcentage.
Julie : Et dans la question (f), on peut aussi calculer l'augmentation, la valeur finale – la valeur initiale, divisée par la valeur initiale, ou bien, projeter verticalement le point de la diagonale d'ordonnée 48,60 et voir le pourcentage qui a été ajouté à 100 %.

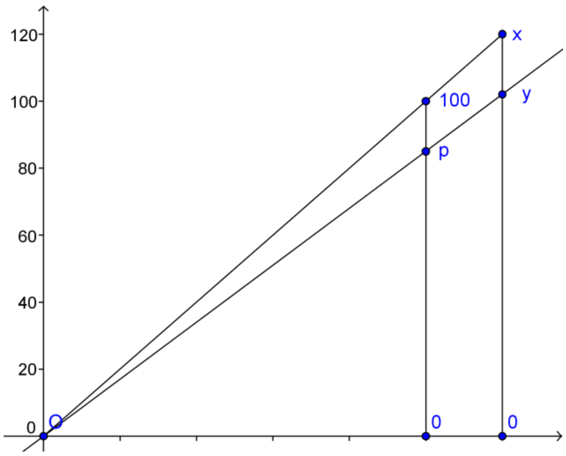
Dans cette représentation, il faut bien comprendre qu'il y a deux échelles, l'une concerne les valeurs (ici souvent des euros), l'autre les pourcentages ; d'où l'idée d'utiliser les deux dimensions du rectangle.

Dans un premier temps, il est possible de faire ce dessin sans respecter l'échelle, juste pour comprendre ce qu'il faut faire. Dans tous les cas, dessiner, c'est déjà une abstraction et c'est souvent un moyen de se motiver pour résoudre le problème.

Face à un problème difficile à comprendre ou à résoudre, un dessin qui représente la situation peut aider à comprendre de quoi il s'agit . Parfois réaliser le dessin est aussi difficile que de résoudre le problème. Ainsi dans le problème 1 (Pb1/P17), réaliser un dessin avec des rectangles (ou tout autre forme) à l'échelle est aussi compliqué que de résoudre le problème initial. Dans le cadre de la représentation, on peut imaginer des formes plus représentatives de la situation : voitures, personnages, formes géographiques …

2. Traduire le problème dans un cadre géométrique

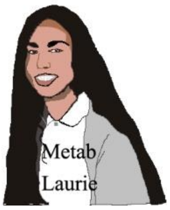
La notion d'agrandissement ou réduction est importante en Géométrie, et l'outil souvent utilisé est le théorème de Thalès. Si on considère que la référence 100 est la base du pourcentage, alors il est normal d'utiliser un segment de longueur 100 (dans une unité adaptée). On peut alors utiliser ce segment pour estimer un pourcentage, la quantité correspondant à ce pourcentage ou même la valeur correspondant aux 100 %.



La lisibilité du graphique dépend essentiellement d'un choix d'unités adaptées qui permettra de placer les points correspondants à *p*, à *x* et à *y*.
A noter que les positions des segments sur l'axe horizontal sont arbitraires et que l'unité peut être différente pour les deux segments verticaux.

3. Faire un tableau

Dans le cas des pourcentages, il s'agit de tableaux de proportionnalité. C'est-à-dire qu'une même multiplication permet de passer d'une colonne à l'autre (ou d'une ligne à l'autre). Pour éviter les erreurs, il est souhaitable de donner un titre à chaque ligne et à chaque colonne. Si plusieurs références interviennent, il est utile d'utiliser de la couleur (Pb1/P26).



Ecrire l'opérateur qui permet de passer de la colonne (ou ligne) des 100 % à celle de la quantité particulière va permettre de mieux comprendre cette notion de pourcentages et de faire le lien avec les autres méthodes.
Cela devient intéressant lorsqu'il s'agit de pourcentages d'évolution : le tableau est plus long à faire, mais il aide à comprendre comment on peut calculer directement la valeur finale à partir de la référence. Réaliser alors que l'on peut connaître l'opérateur sans faire le tableau permet un gain de temps appréciable.

La présentation sous forme de tableaux est souvent un moyen de revenir sur un terrain connu, cependant il est souhaitable de s'en servir pour évoluer vers d'autres méthodes.

4. Trouver l'opérateur

Il s'agit ici de savoir comment on passe de la valeur qui sert de référence, c'est-à-dire qui correspond aux 100 %, à la valeur particulière ; l'opération est une multiplication, c'est donc le coefficient multiplicateur que l'on cherche.

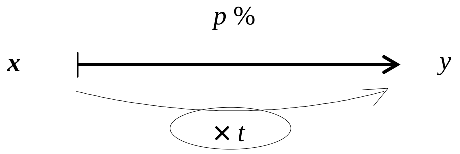
Lorsqu'on « applique seulement un pourcentage » à un nombre, par exemple calculer 8 % de 135, on multiplie par 8 et on divise par 100, le coefficient est 0,08.
En fait, la résolution de beaucoup de problèmes de pourcentages, notamment d'évolution, repose sur le fait d'avoir trouvé le bon opérateur et de l'utiliser correctement.
C'est pourquoi il est important de le mettre en évidence dans les tableaux ou les schémas.

5. Déterminer des proportions

Le calcul de pourcentage est fondamentalement un problème d'égalité de proportions. Mais cette égalité peut se traduire de plusieurs façons. L'utilisation d'un tableau de proportionnalité et du « produit en croix » convient mais aussi l'égalité de fractions dont l'un des dénominateurs est 100. Cette égalité est plus rapide à écrire que de dresser un tableau pour lequel il faudrait préciser les titres de lignes et de colonnes. L'égalité à trous ou avec une lettre pour désigner l'inconnue permet de résoudre les problèmes les plus simples.

6. Schématiser

On utilise ici un schéma de fonction en mettant en évidence l'opérateur.

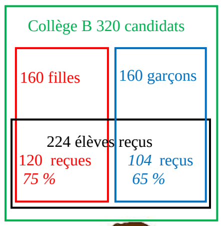


Il est essentiel de commencer par repérer si la situation concerne un pourcentage proportion ou un pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution), puisque l'opérateur va changer. Le nom de la fonction désigne le type de pourcentage.

Ainsi p % désigne un pourcentage proportion, + p % désigne un pourcentage d'augmentation et – p % désigne un pourcentage de diminution. Ce schéma permet de classer les situations et de se repérer dans les différents cas afin de mener le calcul correct.

Par exemple (Pb2/P23), retrouver le prix Hors Taxe connaissant le prix Toute Taxe Comprise et le pourcentage de la taxe sur le prix Hors Taxe est un problème d'augmentation. En effet, la référence est le prix Hors Taxe et la taxe va augmenter le prix. Et on cherche la valeur initiale. Ce n'est pas un problème de diminution.

Dans le cas de sous-ensembles avec des intersections, ou si plusieurs références interviennent, il est utile de représenter les sous-ensembles par des rectangles de couleurs différentes et d'utiliser la couleur du sous-ensemble pour les pourcentages qui y font référence (Pb1/P26).



7. Utiliser des lettres pour remplacer des nombres inconnus

Il est toujours possible de définir une lettre qui va représenter une quantité à condition de bien préciser la quantité concernée avec son unité. Une façon de résoudre le problème du prix Hors Taxe (Pb2/P23), consiste à nommer le prix Hors Taxe en euros x puis à calculer le prixToute Taxe Comprise en fonction de x, d'écrire l'équation ainsi obtenue et la résoudre :

$x + \frac{5}{100}x = 67{,}20$ ce qui équivaut à $1{,}05\,x = 67{,}20$ et à $x = 67{,}20 / 1{,}05$.

8. Définir une fonction

À chaque situation où n'intervient qu'un pourcentage, correspond une fonction linéaire, c'est-à-dire une fonction qui consiste à multiplier un nombre par un coefficient pour obtenir son image.

Dans le cas d'une augmentation de 5 % (Pb2/P23), le coefficient multiplicateur est $\left(1+\frac{5}{100}\right)$, et pour retrouver le prix Hors Taxe, c'est-à-dire la valeur initiale (appelée antécédent dans le vocabulaire des fonctions), il suffit de diviser par $\left(1+\frac{5}{100}\right)$ au lieu de multiplier.