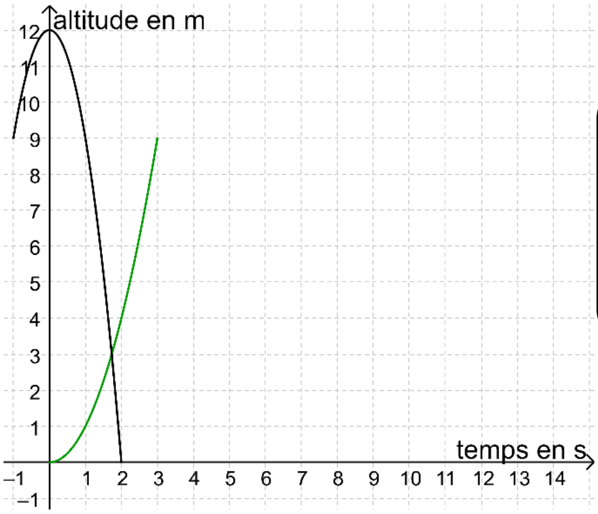
CHAPITRE 4 MAUD ELISÉE AU PAYS DES PARABOLES

Les graphiques ne se limitent pas aux droites. Un trinôme *f* est une fonction dont la formule peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a \neq 0$, sa courbe est une parabole d'axe vertical.

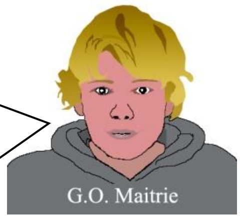
Problème N°1. La fusée retardée

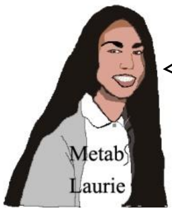
Un club organise le lancement d'une fusée. Maud Élisée explique que la fusée va d'abord monter grâce à la puissance de son moteur pendant 3 secondes, dans cette phase, son altitude en mètres sera égale au carré du temps x écoulé depuis le départ en secondes, x^2 ; elle montre la courbe en vert de la fonction carré notée *f*. Puis le moteur va s'arrêter et la fusée va continuer à monter pendant une seconde jusqu'à 12 m puis elle va redescendre jusqu'au sol. Dans cette deuxième phase, la courbe est superposable avec celle de la fonction r avec $r(x) = 12 - 3\,x^2$ qu'elle a tracé en noir, mais elle est translatée pour prolonger la courbe de *f*.

1. Reproduis et complète le graphique de la deuxième phase par translation de la courbe de r ou utilise un traceur de courbes.
2. On appelle g la fonction représentée dans cette deuxième phase.
   Parmi les formules suivantes, laquelle correspond à g :
   a) $g(x) = r(x) + 4$ b) $g(x) = r(x + 4)$ c) $g(x) = r(x - 4)$ d) $g(x) = r(x) - 4$?
3. Au bout de combien temps la fusée retombe-t-elle au sol ?
   Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
4. Développe l'expression de g. Vérifie que $g(3) = 9$ et $g(4) = 12$.
5. En fait, la fusée part avec un retard de 8 secondes. On appelle m la fonction correspondant à la première phase et p la fonction correspondant à la deuxième phase. Trace les courbes de m et p, trouve leur expression et précise leur ensemble de définition.



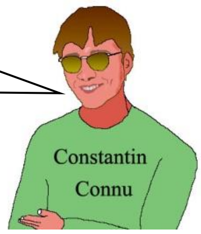
Avec un logiciel de Géométrie qui trace les courbes, tu peux refaire ce graphique et translater les courbes.
Par exemple, avec Geogebra, écris f=Fonction[x^2, 0, 3] et r=Fonction[-3x² + 12, -1, 2] pour définir *f* et *r*.

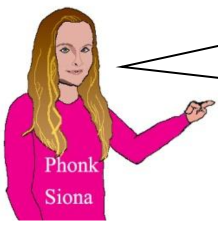




Pour tracer les courbes à la main, on peut utiliser un tableau de valeurs des fonctions *r* et *f*, puis décaler les valeurs.

Pour trouver à quel instant la fusée arrive au sol, on peut résoudre une équation.

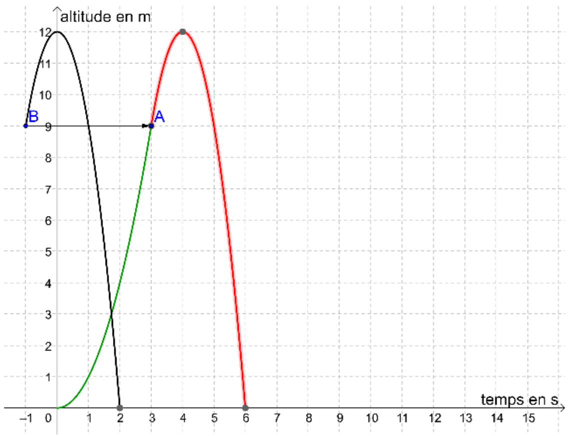




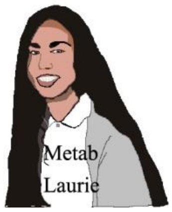
Pour trouver l'image de *x* par la fonction *g*, il faut aller chercher la valeur de l'image par *r* du nombre situé 4 unités avant *x*.

Problème 1 La fusée retardée *Détail des méthodes*

Réalisation du graphique



Utilisation d'un tableau de valeurs



x	– 1	0	1	2
$r(x)$				

x	3	4	5	6
$g(x)$				

x				
$p(x)$				

x	0	1	2	3
x^2				

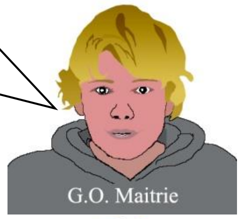
x	8			
$m(x)$				

Fonctions associées

$r(x) = 12 – 3\,x^2$.
$g(x) = r(x – 4) = 12 – 3\,(x – 4)^2$.
$m(x) = f\,(x – 8) = (\qquad)^2$.
$p(x) = g(\quad) = r(\quad) =$

Géométrie

Définis un point A à la fin de la première courbe et un point B au début de la seconde, puis applique la translation qui envoie B en A à la courbe de r.



Résolution d'une équation :
La fusée est au sol lorsque $g(x) = 0$.

Rappelle-toi que $\boldsymbol{X^2 = a^2}$ **équivaut à** $\boldsymbol{X = – a}$ **ou** $\boldsymbol{X = a}$,
mais que, ici, les valeurs de x doivent être dans l'intervalle de définition de g donc on doit avoir $x \geq 3$.

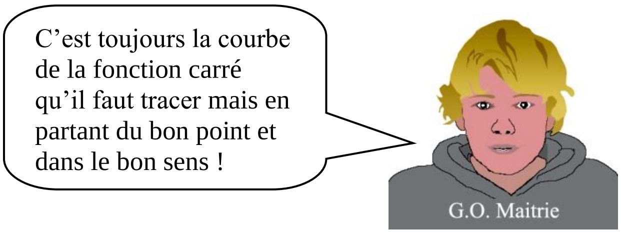
Remarques

On observe que l'expression$12 – 3\,(x – 4)^2$ permet de repérer facilement le maximum de la fonction g et pour quelle valeur il est atteint. En effet le carré $(x – 4)^2$ est toujours positif et s'annule seulement lorsque $(x – 4)$ est nul ; si $(x – 4)$ n'est pas nul, on retranche un nombre strictement positif à 12 donc, l'expression $12 – 3\,(x – 4)^2$ est alors strictement inférieure à 12.
Ainsi le maximum de g sur $\mathbb{R}$est $g(4) = 12$ et le sommet de la parabole est S(4 ; 12).
Par ailleurs, partant du sommet S de la parabole qui représente g, si on ajoute 1 unité à x, l'ordonnée y diminue de 3 unités. Cela vient du coefficient – 3 que l'on trouve devant le carré dans $g(x)$, comme dans $r(x)$. En effet, lorsque x passe de 0 à 1, le carré x^2 passe aussi de 0 à 1, et $– 3\,x^2$ passe de 0 à – 3, et ainsi $r(1) – r(0) = – 3$ et $g(5) – g(4) = r(1) – r(0) = – 3$.
L'expression $\boldsymbol{a\,(x – x_S)^2 + y_S}$ est appelé **la forme canonique** d'un trinôme.
Les nombres x_S et y_S sont les coordonnées du sommet S de la parabole et a est la différence des images de $x_S + 1$ et x_S. Ces deux propriétés permettent de trouver facilement la forme canonique d'une fonction trinôme d'après sa courbe, ou de prévoir les variations d'une fonction trinôme d'après sa forme canonique.
L'expression développée est la forme « standard », puisqu'il est toujours possible de développer un polynôme. Ici, on utilise l'identité remarquable $(a – b)^2 = a^2 – 2\,a\,b + b^2$:
$12 – 3\,(x – 4)^2 = 12 – 3\,(x^2 – 8\,x + 16) = 12 – 3\,x^2 + 24\,x – 48 = – 3\,x^2 + 24\,x – 36$.
Il n'est pas toujours possible de factoriser un trinôme mais ici, c'est possible :
$12 – 3\,(x – 4)^2 = 3\,[2^2 – (x – 4)^2] = 3\,[2 – (x – 4)]\,[2 + (x – 4)] = 3\,[2 – x + 4]\,[2 + x – 4]$
$12 – 3\,(x – 4)^2 = 3\,[– x + 6]\,[x – 2]$. En utilisant $a^2 – b^2 = (a – b)\,(a + b)$.
Il ne faut pas t'effrayer des calculs ci-dessus, le développement est une technique qui peut s'acquérir avec un peu d'entraînement, et la factorisation peut s'obtenir autrement.
Le but de ce problème était de trouver les formules correspondant à des paraboles données.

Nous allons d'abord travailler sur la forme canonique pour son lien avec la courbe et les variations de la fonction.

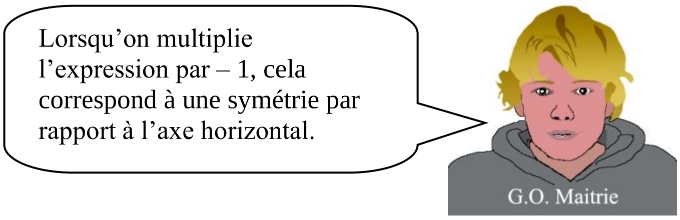
Problème N°2. À l'extrême

Quel est l'extremum (en précisant maximum ou minimum) de chacune des fonctions définies ci-dessous sur l'ensemble des réels, et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
Sur une feuille quadrillée, trace les courbes de ces fonctions, en partant du sommet de la parabole ; elles s'obtiennent toutes à partir de la courbe de la fonction carré r avec $r(x) = x^2$.
$f(x) = (x-3)^2 + 2$ $g(x) = 10 - (x-2)^2$ $h(x) = (x+1)^2$ $p(x) = 15 - (x+2)^2$



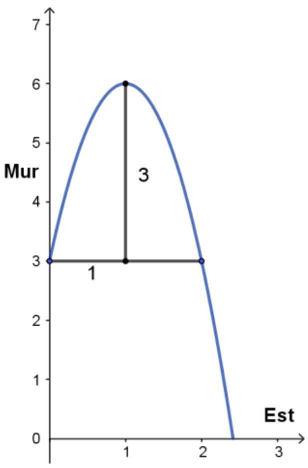
Problème N°3. Les paraboles

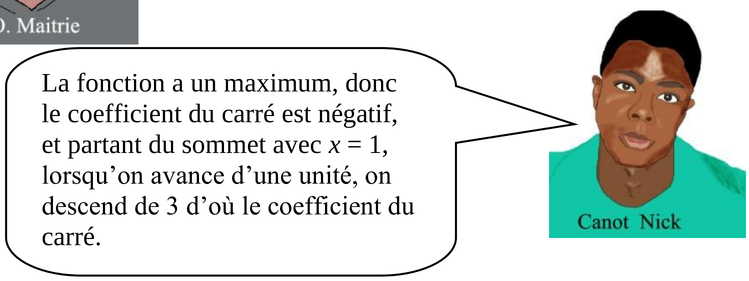
Sur une feuille quadrillée avec l'origine du repère au centre, trace en couleurs différentes les courbes des fonctions r, v, q et s définies sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = x^2$, $v(x) = 2x^2$, $q(x) = 0{,}5\,x^2$ et $s(x) = -x^2$. Puis trace les courbes des fonctions f, g, h et p définies sur l'ensemble des réels ci-dessous ; elles s'obtiennent par translations ou symétries à partir des courbes déjà tracées, utilise la même couleur pour deux courbes superposables.
$f(x) = 0{,}5\,(x-2)^2 + 3$ $g(x) = -(x-3)^2$ $h(x) = 2\,(x+1)^2 - 3$ $p(x) = 15 - 2\,x^2$



Problème N°4. Le jet d'eau

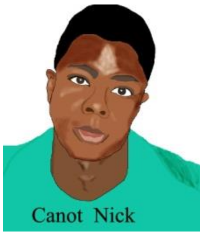
Une fontaine produit un jet d'eau parabolique qui sort du mur à 3 dm du sol, dirigé vers le haut et l'Est.
La hauteur maximale du jet est de 6 dm, et est obtenue à 1 dm de la sortie de l'eau.
Donne la formule de la fonction trinôme représentée par ce jet d'eau.
Détermine à quelle distance du mur, le jet arrive au sol.





Voici les détails des méthodes pour les problèmes 2 et 3.

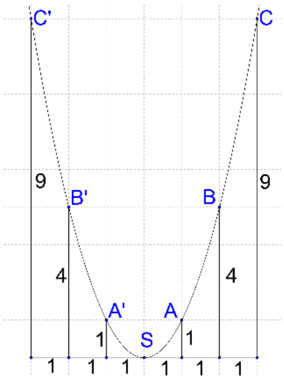
Problème 2 À l'extrême *Détail des méthodes*

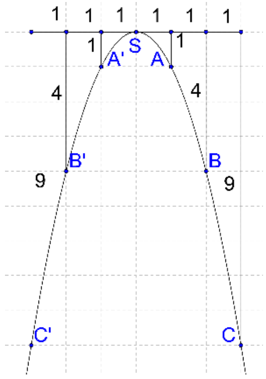


Dans **la forme canonique** $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$, on remarque que $f(x_S) = y_S$, donc la valeur y_S est atteinte au moins une fois.
De plus, si $\boldsymbol{a > 0}$ alors pour tout réel x distinct de x_S, $a(x - x_S)^2 > 0$ donc $f(x) > y_S$; dans ce cas, f a pour **minimum** y_S qui est atteint lorsque $x = x_S$.
Mais si $\boldsymbol{a < 0}$ alors pour tout réel x distinct de x_S, $a(x - x_S)^2 < 0$ donc $f(x) < y_S$; dans ce cas, f a pour **maximum** y_S qui est atteint lorsque $x = x_S$.
Dans tous les cas, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(x_S ; y_S)$.

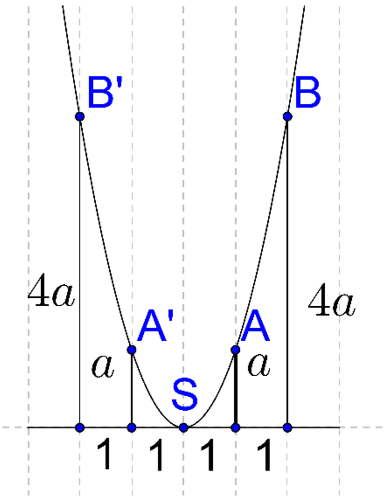
Utilisation des formes géométriques

Voici les constructions pour tracer les courbes superposables avec celle de la fonction carré ; la deuxième est obtenue par translation à partir de la fonction $x \mapsto -x^2$.

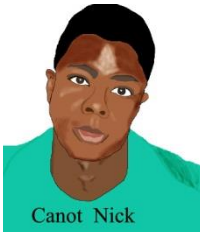


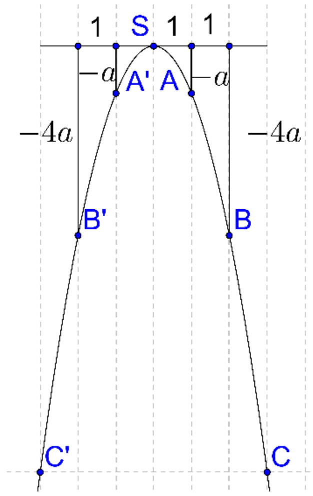


Problème 3 Les paraboles



Dans la forme canonique, si on multiplie le carré par a positif, les écarts sur les ordonnées sont multipliés par a ; si a est négatif, la courbe est transformée par une symétrie par rapport à l'axe horizontal qui passe par le sommet et les écarts sur les ordonnées sont multipliés par $-a$.



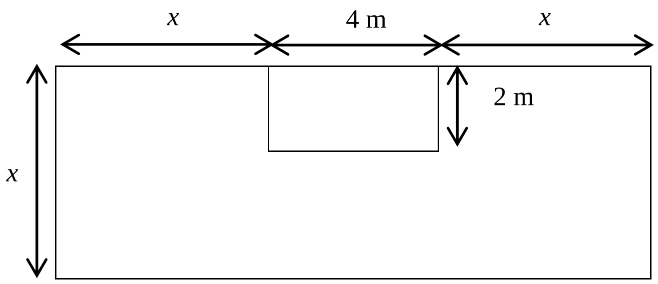


Problème 4 Le jet d'eau *Détail des méthodes*

L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale d'axe $x = 1$, donc $f(2) = f(0) = 3$.
Partant du sommet, lorsqu'on se déplace d'une unité horizontale, la courbe descend de 3 unités donc le coefficient du carré est $a = f(2) - f(1) = 3 - 6 = -3$.
Ainsi dans $a(x - x_S)^2 + y_S$, on a : $a = -3$, $x_S = 1$ et $y_S = f(x_S) = 6$ est le maximum de f.
Pour trouver à quelle abscisse le jet d'eau touche le sol, il faut alors résoudre :
$a(x - x_S)^2 + y_S = 0$ qui équivaut à $a(x - x_S)^2 = -y_S$ et à $(x - x_S)^2 = -y_S/a$.
Ici $-y_S/a$ est un nombre positif donc l'équation équivaut à :
$x - x_S = -\sqrt{-y_S/a}$ ou $x - x_S = \sqrt{-y_S/a}$ et finalement à :
$x = x_S - \sqrt{-y_S/a}$ ou $x = x_S + \sqrt{-y_S/a}$. Remplace x_S, y_S et a par leurs valeurs.
Une seule de ces deux solutions convient. Laquelle et pourquoi ?
Nous voyons dans la démonstration ci-dessus que l'équation $a(x - x_S)^2 + y_S = 0$ n'aura de solutions que si $-y_S/a$ est positif ou nul, autrement dit si a et y_S ont des signes contraires, ou si $y_S = 0$. Imagine des courbes avec différents signes pour a et y_S et retrouve cette règle.

Dans ce problème, nous avons trouvé l'intersection d'une parabole avec une droite horizontale.

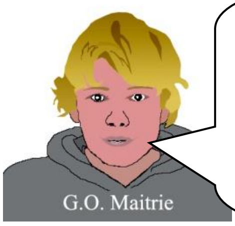
Problème N°5. La discothèque



Le plan ci-dessus représente la salle de danse d'une discothèque avec un rectangle de 2 m sur 4 m pour le bar. Le problème est de déterminer x pour que l'espace réservé aux danseurs ait une aire d'au moins 440 m².

a) Montre que le problème revient à déterminer le premier réel positif tel que $x^2 + 2x + 1 = 225$.

b) En écrivant $x^2 + 2x + 1$ sous la forme d'un carré, résous l'équation et conclue.



La salle de danse peut être décomposée en trois rectangles auxquels on enlève un rectangle de 2m × 4m.
Pour **b)** assemble un carré de côté x, deux rectangles de côtés x et 1 et un carré de côté 1, pour faire un carré.

On obtient une équation équivalente en divisant les deux membres par 2 ou en ajoutant le même nombre à chaque membre.
Pour **b)**, on peut utiliser $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Problème N°6. Des identités remarquables pour factoriser

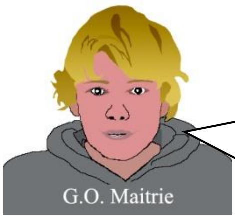
1) Retrouve les identités remarquables en développant $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ et $(a + b)(a - b)$.

2) Écris les expressions suivantes sous formes de carrés ou de produits.

a) $x^2 + 10x + 25$ **b)** $x^2 + 6x + 9$ **c)** $x^2 - 8x + 16$ **d)** $x^2 - 36$

3) Écris les expressions suivantes sous formes de produits.

a) $2x^2 + 20x + 50$ **b)** $5x^2 + 30x + 45$ **c)** $-x^2 + 8x - 16$ **d)** $2x^2 - 200$



On peut retrouver les identités remarquables à partir de figures géométriques.

Pour le **3)**, commence par mettre en facteur le coefficient de x^2, puis utilise le **2)**.

Problème N°7. Résoudre avec la forme canonique

Les équations suivantes ont-elles des solutions ? Si oui, lesquelles ?

Attention : certaines expressions sont strictement positives, on ne peut pas les factoriser.

1) a) $5x^2 - 20 = 0$ **b)** $(x - 4)^2 - 49 = 0$ **c)** $3(x + 7)^2 - 27 = 0$ **d)** $2(x - 6)^2 + 28 = 0$

2) a) $3(x + 2)^2 = 27$ **b)** $4(x - 3)^2 + 1 = 29$ **c)** $5(x - 2)^2 - 13 = -13$ **d)** $7(x + 5)^2 + 28 = 14$

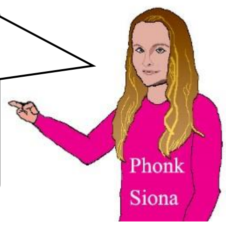
Tu peux soustraire le 2ème membre s'il n'est pas nul puis factoriser le 1er membre.
Utilise ensuite la propriété :
Un produit de facteurs est nul si et seulement l'un ou l'autre des facteurs est nul.

Tu peux utiliser le théorème :

Si $k > 0$ alors $X^2 = k$ équivaut à $X = -\sqrt{k}$ ou $X = \sqrt{k}$

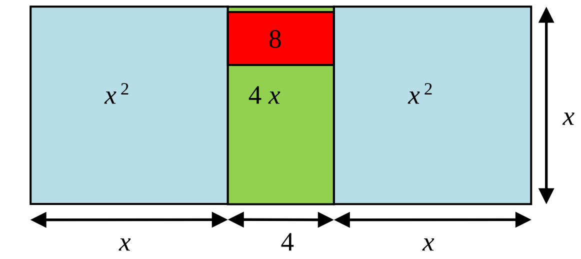
Si $k = 0$ alors $X^2 = 0$ équivaut à $X = 0$

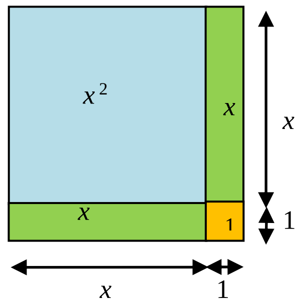
Si $k < 0$ alors $X^2 = k$ n'a pas de solution.



Problème 5 La discothèque *Détails des méthodes*

Utiliser une représentation géométrique





Utiliser l'algèbre

Les équations suivantes sont équivalentes :

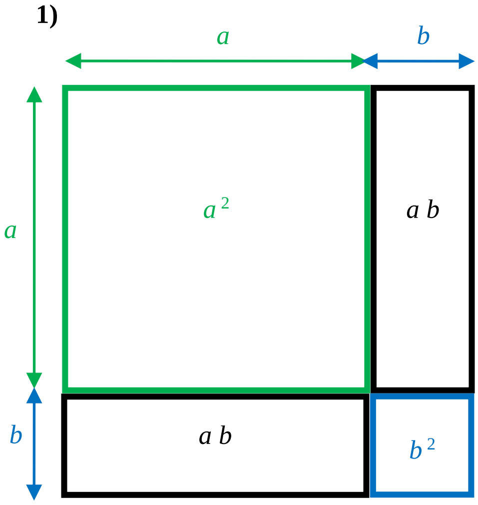
$$2x^2 + 4x - 8 = 440$$
$$x^2 + 2x - 4 = 220$$
$$x^2 + 2x + 1 = 225$$
$$(\qquad)^2 = (\ )^2$$

Or les carrés de deux nombres sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés, donc l'équation équivaut à : … ou …

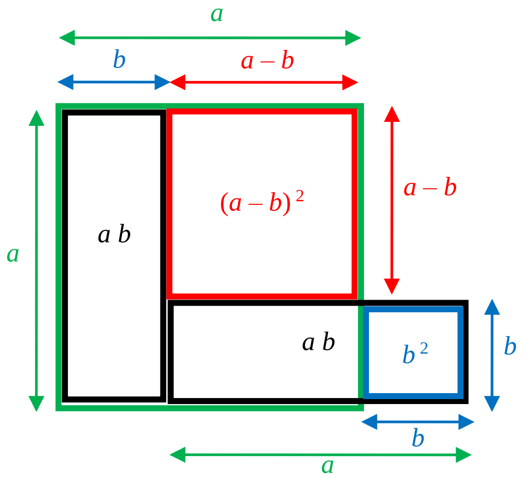
Nous avons traduit un problème géométrique en une équation et nous l'avons résolue.

Problème 6 Des identités remarquables pour factoriser *Détails des méthodes*

1)

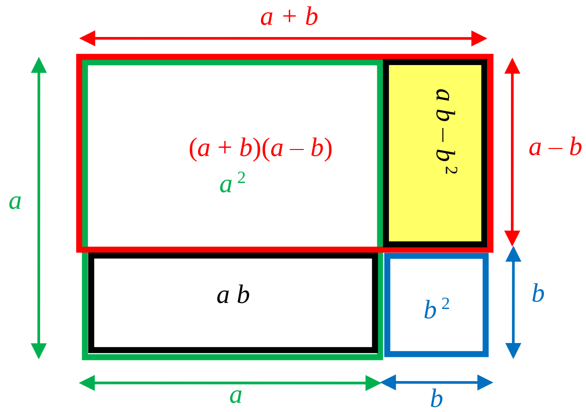


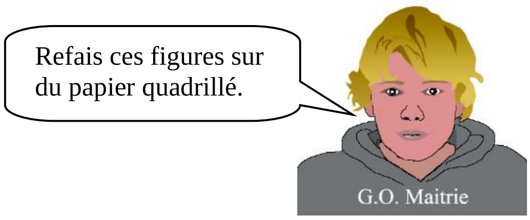
$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$



$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2\,a\,b$

$a^2 + b^2 - 2\,a\,b = (a - b)^2$





$(a + b)(a - b) = a^2 - a\,b + a\,b - b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2) *Réaliser les figures géométriques correspondant aux trinômes est souvent possible mais long, il est préférable de connaître les identités remarquables par cœur et de les utiliser : D'abord reconnaître l'identité à utiliser, l'écrire sur une ligne et en dessous remplacer les lettres par des parenthèses à compléter :*

a) $a^2 + 2\ a\ b + b^2 = (a + b)^2$ $x^2 + 10\,x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 = (x + \ldots)^2$	**b)** $a^2 + 2\ a\ b + b^2 = (a + b)^2$ $x^2 + 6\,x + 9 = (x)^2 + 2(x)(\ ) + (\ )^2 = (x + \ldots)^2$
c) $a^2 - 2\ a\ b + b^2 = (a - b)^2$ $x^2 - 8\,x + 16 = (x)^2 - 2(x)(\ ) + (\ )^2 = (x - \ldots)^2$	**d)** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $x^2 - 36 = (x)^2 - (\ )^2 = (x + \ldots)(x - \ldots)$

3) a) $2\,x^2 + 20\,x + 50 = 2\,(x^2 + 10\,x + 25) = 2\,(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

b) $5\,x^2 + 30\,x + 45 = 5\,(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ) = 5\,(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

c) $-x^2 + 8\,x - 16 = -(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ) = -(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

d) $2\,x^2 - 200 = 2\,(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ) = 2\,[(\ldots)^2 - (\ldots)^2] = 2\,[\ldots\ldots\ldots\ldots]\,[\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Dans ce problème, nous avons transformé des écritures algébriques.

Problème 7 Résoudre avec la forme canonique *Détails des méthodes*.

1) a) $5\,x^2 - 20 = 0$ équivaut à $5\,(x^2 - 2^2) = 0$ et à $5\,(x + 2)\,(x - 2) = 0$
Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul donc $5\,x^2 - 20 = 0$ équivaut à $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0\ldots$

b) $(x - 4)^2 - 49 = (x - 4)^2 - 7^2 = [(x - 4) + 7]\,[(x - 4) - 7] = [x + 3]\,[x - 11]\ldots$

c) $3\,(x + 7)^2 - 27 = 3\,[(x + 7)^2 - 9] = 3\,[(x + 7) + 3]\,[(x + 7) - 3] = \ldots$

d) $(x - 6)^2$ est un carré donc est positif ou nul, ainsi que $2\,(x - 6)^2$ et donc $2\,(x - 6)^2 + 28 \geq 28 > 0$, l'équation $2\,(x - 6)^2 + 28 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Ou : $2\,(x - 6)^2 + 28 = 0$ équivaut à $(x - 6)^2 = -14$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

2) a) $3\,(x + 2)^2 = 27$ équivaut à $3\,(x + 2)^2 - 27 = 0$ puis à $3\,[(x + 2)^2 - 3^2] = 0\ldots$
Ou $3\,(x + 2)^2 = 27$ équivaut à $(x + 2)^2 = 9$ puis à $x + 2 = -3$ ou $x + 2 = 3\ldots$

b) $4\,(x - 3)^2 + 1 = 29$ équivaut à $(x - 3)^2 = 7$ puis à $x - 3 = -\sqrt{7}$ ou $x - 3 = \sqrt{7}\ldots$

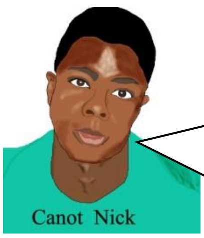
c) $5\,(x - 2)^2 - 13 = -13$ équivaut à $(x - 2)^2 = 0$ puis à $x - 2 = 0\ \ldots$

d) $7\,(x + 5)^2 + 28 = 14$ équivaut à $7\,(x + 5)^2 = -14$ puis à $(x + 5)^2 = -2\ldots$

Mais comment trouver la forme canonique ?

<u>Problème N°8.</u> À la recherche du bon trinôme

a) Trouve l'expression d'une fonction trinôme dont le minimum 8 est obtenu pour $x = 6$.
b) Trouve l'expression d'une fonction trinôme dont le maximum 2 est obtenu pour $x = 3$.
c) Trouve l'expression d'une fonction trinôme dont le maximum 4 est obtenu pour $x = 0$.
d) Trouve une fonction trinôme f dont le minimum est $f(4) = 6$ et telle que $f(0) = 54$.
e) Trouve une fonction trinôme f dont le maximum $f(5) = 17$ et telle que $f(2) = -19$.



Pense à la forme canonique : $a\,(x - x_S)^2 + y_S$.

Si a est positif, la courbe sourit : ☺.

Si a est négatif, la courbe est triste : ☹.
Pense à vérifier l'allure de la courbe à la fin.

Pour **a) b) c)**, il y a plusieurs réponses possibles.
Pour **d) e)**, une seule solution qui peut être obtenue par une ou des équations.

<u>Problème N°9.</u> Trouver le sommet

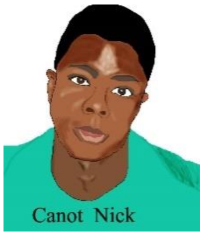
a) Détermine les nombres réels x_S et y_S tels que l'expression développée de $5\,(x - x_S)^2 + y_S$ soit $f(x) = 5\,x^2 - 20\,x + 13$. Vérifie que $f(x_S) = y_S$.

b) Détermine x_S et y_S tels que pour tout réel x, on ait : $2\,(x - x_S)^2 + y_S = 2\,x^2 + 40\,x + 150$.

c) Détermine x_S et y_S tels que pour tout réel x, on ait : $-3\,(x - x_S)^2 + y_S = -3\,x^2 + 9\,x + 20$.

d) Détermine $\boldsymbol{a'}$, x_S et y_S pour que l'expression développée de $\boldsymbol{a'}\,(x - x_S)^2 + y_S$ soit $\boldsymbol{a}\,x^2 + b\,x + c$.

Problème 8 À la recherche du bon trinôme *Détails des méthodes.*



Utiliser la forme canonique et une résolution d'équation

a) $x_S = 6$; $y_S = 8$ et tout nombre a avec $a > 0$ convient. **b)** $a < 0$. **c)** $a < 0$.

d) On cherche a tel que $a\,(x-4)^2 + 6 = 54$ lorsque $x = 0$ avec $a > 0$.

e) On cherche a tel que $a\,(x-5)^2 + 17 = -19$ lorsque $x = 2$ avec $a < 0$.

Problème 9 Trouver le sommet *Détails des méthodes.*

a) $5\,(x - x_S)^2 + y_S = 5\,(x^2 - 2\,x_S\,x + x_S{}^2) + y_S = 5\,x^2 - 10\,x_S\,x + 5\,x_S{}^2 + y_S$

Les polynômes $5\,(x - x_S)^2 + y_S$ et $5\,x^2 - 20\,x + 13$ ont la même expression développée, si et seulement si les coefficients de x^2, de x et le terme constant sont égaux, c'est-à-dire :

$\begin{cases} 5 = 5 \\ -10x_S = -20 \\ 5{x_S}^2 + y_S = 13 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x_S = 2 \\ 5{x_S}^2 + y_S = 13 \end{cases}$ puis à $\begin{cases} x_S = 2 \\ 20 + y_S = 13 \end{cases}$

L'équation $5 = 5$ nous montre que dans les deux expressions les coefficients des carrés doivent être égaux ; cette équation est toujours vérifiée, elle peut être ôtée du système.

Vérifie avec la valeur y_S trouvée que $f\,(x_S) = y_S$.

b) $2\,(x - x_S)^2 + y_S = 2\,(x^2 - 2\,x_S\,x + x_S{}^2) + y_S = 2\,x^2 - 4\,x_S\,x + 2\,x_S{}^2 + y_S$

Les polynômes $2\,x^2 - 4\,x_S\,x + 2\,x_S{}^2 + y_S$ et $2\,x^2 + 40\,x + 150$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ -4x_S = 40 \\ 2{x_S}^2 + y_S = 150 \end{cases}$$

c) $-3\,(x - x_S)^2 + y_S = -3\,(x^2 - 2\,x_S\,x + x_S{}^2) + y_S = -3\,x^2 + 6\,x_S\,x - 3\,x_S{}^2 + y_S$

Les polynômes $-3\,x^2 + 6\,x_S\,x - 3\,x_S{}^2 + y_S$ et $-3\,x^2 + 9\,x + 20$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} -3 = -3 \\ 6x_S = 9 \\ -3{x_S}^2 + y_S = 20 \end{cases}$$

d) $a'\,(x - x_S)^2 + y_S = a'\,x^2 - 2\,a'\,x_S\,x + a'x_S{}^2 + y_S$

Les polynômes $a'\,x^2 - 2\,a'\,x_S\,x + a'x_S{}^2 + y_S$ et $a\,x^2 + b\,x + c$ sont égaux si et seulement si :

$\begin{cases} a' = a \\ -2a'x_S = b \\ a'{x_S}^2 + y_S = c \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} a' = a \\ -2ax_S = b \\ a{x_S}^2 + y_S = c \end{cases}$ puis à $\begin{cases} a' = a \\ x_S = \frac{-b}{2a} \\ y_S = c - a{x_S}^2 \end{cases}$

Or $c - a{x_S}^2 = c - a\frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a}$

et $f\,(x_S) = a{x_S}^2 + bx_S + c = a\frac{b^2}{4a^2} + b\frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$

ainsi le système peut s'écrire $\begin{cases} a' = a \\ x_S = \frac{-b}{2a} \\ y_S = f(x_S) \end{cases}$.

La première égalité montre que le coefficient a est bien le même dans $a\,(x - x_S)^2 + y_S$ et dans $a\,x^2 + b\,x + c$. La deuxième et la troisième égalité sont à retenir.

Cette résolution dans le cas général permet de déterminer plus rapidement la forme canonique d'un trinôme.

Par exemple, pour $5\,x^2 - 20\,x + 13$ où $a = 5$, $b = -20$ et $c = 13$, on détermine d'abord x_S.

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(5)} = 2$ puis $y_S = f\,(x_S) = 5(2)^2 - 20\,(2) + 13 = -7$.

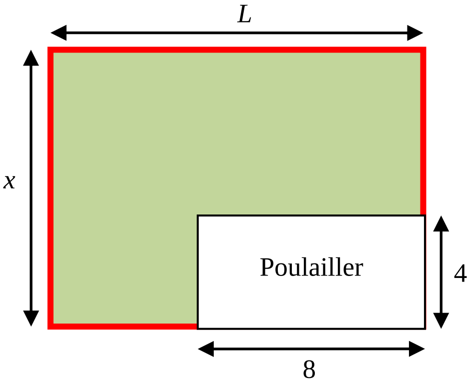
La forme canonique de $5\,x^2 - 20\,x + 13$ est $a\,(x - x_S)^2 + y_S = 5\,(x-2)^2 - 7$.

*Tu peux t'entraîner sur les questions **b)** et **c)**.*

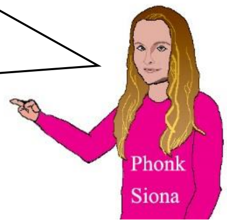
Nous savons trouver la forme canonique d'un trinôme à partir de la forme développée. Et à partir de celle-ci, nous savons résoudre des équations du second degré, repérer l'extremum, minimum ou maximum, et tracer la courbe.

Problème N°10. Les poules en plein air

On veut réaliser un enclos rectangulaire délimité par 40 m de grillage (en rouge) qui inclus un poulailler de 4 m sur 8 m, sur l'un des côtés. Il n'y a pas de grillage le long du mur. On cherche les dimensions x et L (en mètres) pour lesquelles l'aire de l'enclos hors poulailler est maximale.



Trouve une relation entre L et x avec la longueur du grillage, puis exprime L en fonction de x.
Puis calcule l'aire $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x seulement.

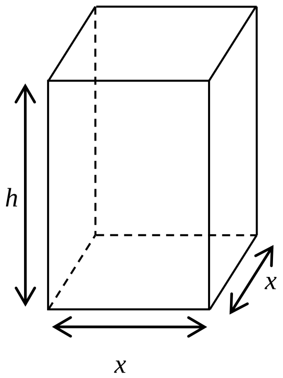


Problème N°11. Le pavé aux grandes faces

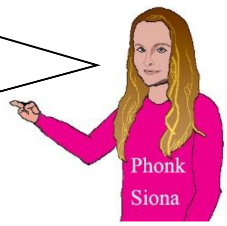
La longueur totale des arêtes d'un parallélépipède rectangle à base carrée (pavé droit) est 36.
On note x la longueur du côté de la base et h la hauteur de ce parallélépipède.

a) Exprimer l'aire totale A des faces du pavé en fonction de x.

b) Quelle est l'aire maximale ? Quelle est la nature de ce pavé dans le cas où A est maximale ?



Trouve une relation entre x et h, puis exprime h en fonction de x.
Dans le calcul de A, remplace h par son expression en fonction de x.



Problème N°12. Le cinéma

Lorsque le prix d'une place est de 10 €, le gérant du cinéma constate qu'il y a 400 spectateurs. Et il a remarqué que l'assistance diminuait de 25 spectateurs chaque fois qu'il augmentait le prix de la place de 1 €. Par ailleurs, pour chaque séance, il doit payer 2 € par spectateur au distributeur des films et il a 300 € de frais fixes.

a) Détermine le nombre de spectateurs y en fonction du prix x de la place en euros.

b) Détermine la recette $R = x\,y$ et les frais F en euros en fonction de x pour chaque séance.

c) Détermine le bénéfice $B = R - F$ en fonction du prix x de la place.

d) Pour quel prix x, le bénéfice sera-t-il maximal et quel est alors sa valeur ?

e) Pour quel prix x, le bénéfice est-il exactement égal à 0 ?

Problème N°13. Résolution générale de $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ($a \neq 0$)

Démontre que le nombre de solutions réelles de $a\,x^2 + b\,x + c$ (où $a \neq 0$) dépend du signe de $b^2 - 4\,a\,c$. Cette expression est appelée le discriminant et est notée Δ (lire delta). Et dans le cas où il y a des solutions, donne leurs formules en fonction de a, b, c et Δ et trouve la factorisation de $a\,x^2 + b\,x + c$.

Indications : voir page 48

Utilise la forme canonique : $a\,(x - x_S)^2 + y_S$
avec $x_S = \frac{-b}{2a}$ et $y_S = f\,(x_S) = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Problème **10** Les poules en plein air *Détails de la méthode*

Utiliser une fonction d'une seule variable

La longueur du grillage est : $L - 8 + x + L + x - 4 = 40$ donc $2L + 2x = 52$, ainsi $L + x = 26$.
On en déduit l'expression de L en fonction de x.
L'aire du terrain qui nous intéresse est : $\boldsymbol{A}(x) = x L - 4 \times 8 = x L - 32$.
On remplace L par son expression en fonction de x, on obtient ainsi un trinôme $\boldsymbol{A}(x)$ et on cherche pour quelle valeur de x, ce trinôme est maximum ; c'est la valeur x_S de la forme canonique dont le calcul est indiqué page 52.

Problème **11** Le pavé aux grandes faces *Indications*

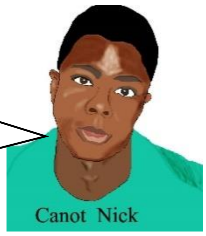
La somme des arrêtes est 36 donc $8x + 4h = 36$ ce qui donne $4h = 36 - 8x$, et $h = \ldots$
L'aire totale des faces est : $A = 2x^2 + 4hx$ ce qui permet de trouver S en fonction de x seulement ; on obtient un trinôme, et on cherche pour quelle valeur de x, ce trinôme est maximum. On en déduit ensuite la valeur de h et on observe le pavé obtenu.

Problème **13** Résolution générale de $a x^2 + b x + c = 0$ $(a \neq 0)$

L'équation $a x^2 + b x + c = 0$ équivaut à $a (x - x_S)^2 + y_S = 0$

avec $x_S = \frac{-b}{2a}$ et $y_S = f(x_S) = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a}$.

On retrouve ici le fait que $a (x - x_S)^2 + y_S = 0$ n'aura de solutions que si $-y_S/a$ est positif ou nul.



Elle équivaut ainsi à $(x - x_S)^2 = \frac{-y_S}{a}$ car $a \neq 0$

Et $\frac{-y_S}{a} = \frac{1}{a}(-y_S) = \frac{1}{a} \times \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Ainsi $a x^2 + b x + c = 0$ équivaut à $(x - x_S)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

De plus, $4a^2$ est un réel strictement positif puisque $a \neq 0$ donc le signe du deuxième membre est celui de $b^2 - 4ac$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ est le D majuscule grec et se lit delta).

Résolution de l'équation

- Si $\Delta > 0$, l'équation équivaut à : $x - x_S = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x - x_S = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ et à :
  $x - x_S = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x - x_S = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ car $\sqrt{4a^2}$ vaut soit 2 a soit – 2 a.
  $x = x_S - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = x_S + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ autrement dit : $x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Les solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation équivaut à : $(x - x_S)^2 = 0$,
  à $x - x_S = 0$ et à $x = x_S$ c'est-à-dire $x = \frac{-b}{2a}$

Remarquez que les formules précédentes donnent deux fois cette valeur si $\Delta = 0$, c'est pourquoi on dit qu'il s'agit d'une solution double (ou une racine double du trinôme).

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Factorisation

Si $\Delta \geq 0$ alors $a x^2 + b x + c = a (x - x_S)^2 + y_S = a [(x - x_S)^2 + y_S/a]$

Or $\frac{-y_S}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$ donc $\frac{y_S}{a} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ et comme $\Delta \geq 0$, $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ et ainsi $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ d'où :

$$a x^2 + b x + c = a\left[(x - x_S)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[(x - x_S) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x - x_S) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

On remarque que si $\Delta = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_S$ et $a x^2 + b x + c = a (x - x_S)(x - x_S) = a (x - x_S)^2$.

Si $\Delta < 0$, il n'est pas possible de factoriser $a x^2 + b x + c$ avec une ou deux fonctions affines réelles non constantes, car si c'était le cas, l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ aurait au moins une solution réelle ce qui est faux.

Voici quelques problèmes pour utiliser les formules précédentes.

<u>Problème N°14.</u> Equations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

- **a)** $2{,}5\,x^2 - 55\,x + 280 = 0$
- **b)** $-3\,x^2 + 30\,x - 63 = 0$
- **c)** $0{,}7\,x^2 - 14\,x + 81{,}2 = 0$
- **d)** $1{,}5\,x^2 - 24\,x + 89 = 0$

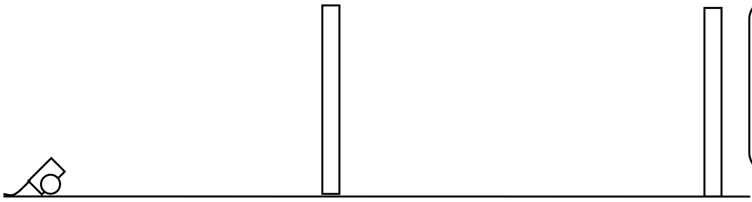
Tu peux calculer d'abord le discriminant Δ puis les solutions s'il y en a.

<u>Problème N°15.</u> Le vol parabolique du cormoran

Un cormoran vole selon une parabole d'équation $y = x^2 - 9\,x + 20$ où x désigne la position horizontale et y l'altitude en mètres.
Le cormoran franchira-t-il deux fois la surface de la mer (à l'altitude 0) ?
Et si oui, pour quelles valeurs de x ?

<u>Problème N°16.</u> Le canon contre le château

Les ennemis se sont regroupés dans une place fortifiée protégée par des murs de 10 mètres de haut espacés de 40 mètres.
Le canon envoie des obus dont l'altitude y en mètres, en fonction de la distance x en mètres par rapport au canon, est donné par l'équation : $y = -0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x$.
A quelles distances du canon l'obus dépasse-t-il 10 mètres d'altitude ?
En déduire à quelle distance du premier mur doit se trouver le canon.



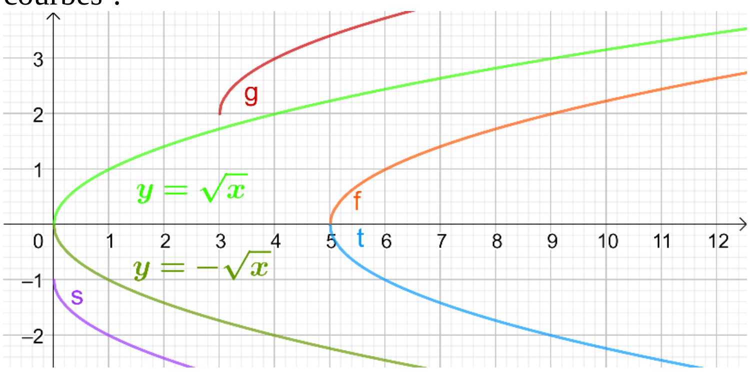
Pour résoudre
$-0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x \geq 10$
commence par
$-0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x - 10 = 0$
et observe la courbe.

<u>Problème N°17.</u> L'atterrissage

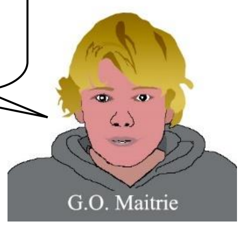
La fusée s'approche pour atterrir. Son altitude en mètres à l'instant t en secondes est donnée par l'équation $f\,(t) = a\,t^2 - 400\,t + 20\,000$.
L'atterrissage sera réussi en douceur si l'équation $f\,(t) = 0$ a une solution double.
Sauras-tu trouver la valeur de a pour cela ?
Et dans ce cas, à quel instant aura lieu l'atterrissage ?

<u>Problème N°18.</u> Demi-paraboles d'axe horizontal

Si l'équation est $y^2 = x$, elle équivaut à $y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$ avec $x \geq 0$.
La parabole a un axe horizontal et elle est constituée des courbes de deux fonctions.
Sauras-tu reconnaître les fonctions associées à la fonction racine carrée dont voici les courbes ?



Rappelle-toi le premier problème avec le décalage dans le temps !



REPONSES

Problème 1 La fusée retardée page 45

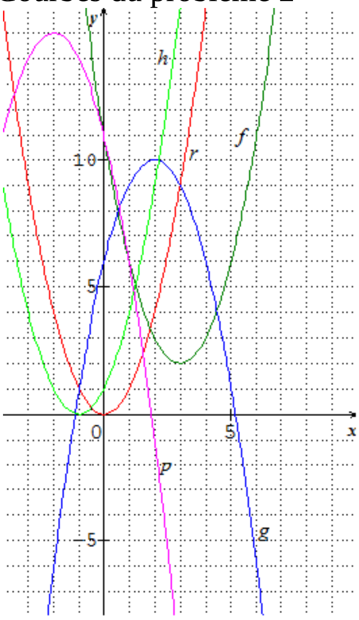
1. Voir le graphique page 46
2. c) $g(x) = r(x - 4) = 12 - 3\,(x - 4)^2$.
3. $g(x) = 0$ équivaut à $12 - 3\,(x - 4)^2 = 0$, à $(x - 4)^2 = 4$, donc à $x - 4 = -2$ ou $x - 4 = 2$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = 6$, mais ici, $x \geq 3$ donc $x = 6$.
   On peut aussi utiliser la forme factorisée (voir page 46) : $g(x) = 3\,(-x + 6)\,(x - 2)$ puis la propriété « Un produit est nul si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul » ce qui conduit à $-x + 6 = 0$ ou $x - 2 = 0$ c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = 6$…
4. $g(x) = -3\,x^2 + 24\,x - 36$.
5. $m(x) = f\,(x - 8) = (x - 8)^2$ sur [8 ; 11]. $p(x) = g(x - 8) = r(x - 12) = 12 - 3\,(x - 12)^2$.
   On obtient les courbes de m et p en translatant celles de f et g de 8 unités vers la droite.

Problème 2 À l'extrême page 47

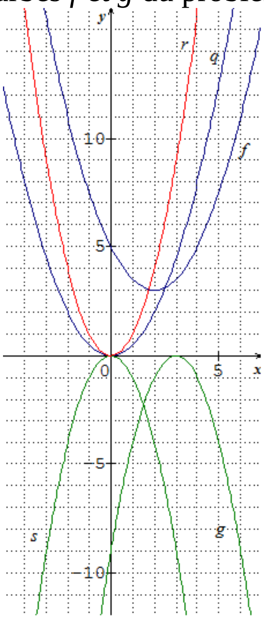
$f\,(x) = (x - 3)^2 + 2$	Le minimum de f est 2 et il est obtenu en $x = 3$.
$g(x) = 10 - (x - 2)^2$	Le maximum de g est 10 et il est obtenu en $x = 2$.
$h(x) = (x + 1)^2$	Le minimum de h est 0 et il est obtenu en $x = -1$.
$p(x) = 15 - (x + 2)^2$	Le maximum de p est 15 et il est obtenu en $x = -2$.

Problème 3 Les paraboles page 47

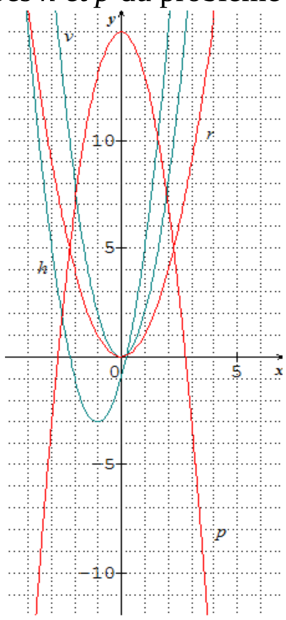
Courbes du problème 2



Courbes f et g du problème 3

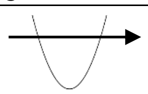
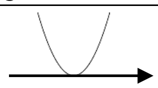
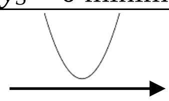
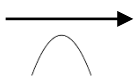
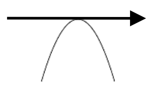
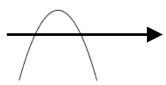


Courbes h et p du problème 3



Problème 4 Le jet d'eau page 47

La formule est $f\,(x) = 6 - 3\,(x - 1)^2$ puisque le maximum est $f\,(1) = 6$ et que le point dont l'abscisse est 1 unité de plus que celle du sommet soit 1 + 1 = 2, l'ordonnée diminue de 3.
Le jet d'eau atteint le sol au point d'abscisse x avec $6 - 3\,(x - 1)^2 = 0$ soit $(x - 1)^2 = 2$ ce qui conduit à $x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$, mais ici, $x \geq 1$ donc $x = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$.
Le jet d'eau arrive au sol à environ 2,41 dm du mur.

	$y_S < 0$ minimum négatif	$y_S = 0$ minimum nul	$y_S > 0$ minimum positif
$a > 0$ a est positif			
$a < 0$ a est négatif			

L'équation $a\,(x - x_S)^2 + y_S = 0$ n'a de solutions dans $\mathbb{R}$ que si a et y_S n'ont pas le même signe.

Problème 5 La discothèque page 49

a) Le plan de la discothèque est constitué de deux carrés d'aire x^2, d'un rectangle d'aire $4x$ auquel il faut ôter un rectangle d'aire 8 m², soit en tout $2x^2 + 4x - 8$ m².
L'expression $2x^2 + 4x - 8$ croît avec x lorsque x est positif, et donc deviendra supérieur ou égale à 440 à partir du premier nombre réel positif x tel que $2x^2 + 4x - 8 = 440$. Cette condition équivaut à $x^2 + 2x - 4 = 220$ lorsqu'on divise chaque membre de l'égalité par 2.
L'équation équivaut à $x^2 + 2x + 1 = 225$ lorsqu'on ajoute 5 à chaque membre de l'égalité.
b) Cette équation équivaut à $(x + 1)^2 = 15^2$ puis à $x + 1 = -15$ ou $x + 1 = 15$ c'est-à-dire $x = -16$ ou $x = 14$. Comme ici x ne peut être que positif, la solution de cette équation est 14. Pour que l'espace réservé aux danseurs ait une aire d'au moins 440 m², il faudra que la largeur x soit au moins de 14 m, et la longueur $2x + 4$ d'au moins 32 m.

Problème 6 Des identités remarquables pour factoriser page 49

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
2) Écris les expressions suivantes sous formes de carrés ou de produits.
   a) $(x + 5)^2$ **b)** $(x + 3)^2$ **c)** $(x - 4)^2$ **d)** $(x + 6)(x - 6)$
3) Écris les expressions suivantes sous formes de produits.
   a) $2(x + 5)^2$ **b)** $5(x + 3)^2$ **c)** $-(x - 4)^2$ **d)** $2(x + 10)(x - 10)$

Problème 7 Résoudre avec la forme canonique page 49

S désigne l'ensemble des solutions et $\varnothing$ l'ensemble vide (l'équation n'a pas de solution).
1) a) $S = \{-2 ; 2\}$ **b)** $S = \{-3 ; 11\}$ **c)** $S = \{-10 ; -4\}$ **d)** $S = \{\} = \varnothing$
2) a) $S = \{1 ; -5\}$ **b)** $S = \{3 - \sqrt{7} ; 3 + \sqrt{7}\}$ **c)** $S = \{2\}$ **d)** $S = \varnothing$

Problème 8 À la recherche du bon trinôme page 51

a) $a(x - 6)^2 + 8$ tout nombre a avec $a > 0$ convient. Par exemple : $f(x) = 7(x - 6)^2 + 8$.
b) $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$ avec $a < 0$. **c)** $f(x) = ax^2 + 4$ avec $a < 0$.
d) $f(x) = a(x - 4)^2 + 6$ avec $f(0) = 54$ donc $16a + 6 = 54$ ainsi $a = 3$. $f(x) = 3(x - 4)^2 + 6$.
e) $f(x) = a(x - 5)^2 + 17$ avec $f(2) = -19$ d'où $a = -4$ et $f(x) = -4(x - 5)^2 + 17$.

Problème 9 Trouver le sommet page 51

a) $x_S = 2$; $y_S = -7$ **b)** $x_S = -10$; $y_S = -50$ **c)** $x_S = 1{,}5$; $y_S = 26{,}75$
d) $a' = a$; $x_S = \frac{-b}{2a}$; $y_S = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$ mais il suffit de retenir $y_S = f(x_S)$.

Problème 10 Les poules en plein air page 53

$L = 26 - x$ et $\mathcal{A}(x) = xL - 32 = x(26 - x) - 32 = -x^2 + 26x - 32$.
Le maximum de $\mathcal{A}(x)$ est obtenu lorsque $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(26)}{2(-1)} = 13$, il vaut A(13) = 137 et L = 13.

Le pavé aux grandes faces page 53

La somme des arrêtes est 36 donc $8x + 4h = 36$ ce qui donne $h = 9 - 2x$ $(0 < x < 4{,}5)$.
L'aire totale des faces est : $A = 2x^2 + 4x(9 - 2x) = 2x^2 + 36x - 8x^2 = -6x^2 + 36x$.
Le maximum est obtenu pour $x = 3$ et vaut 54, alors $h = 3$, le pavé droit est un cube.

Problème 12 Le cinéma page 53

a) $y = 400 - 25(x - 10)$ soit $y = -25x + 650$ (voir chapitre 1 : prévoir avec 2 informations).
b) $R = xy = x(-25x + 650) = -25x^2 + 650x$
$F = 2y + 300 = 2(-25x + 650) + 300 = -50x + 1\,600$
c) $B = R - F = -25x^2 + 650x - (-50x + 1\,600) = -25x^2 + 700x - 1\,600$.
d) B est maximal lorsque $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-700}{2(-25)} = 14$ et vaut alors $B(14) = 3\,300$.
e) $B = 0$ équivaut à $-25(x - 14)^2 + 3\,300 = 0$, et à $(x - 14)^2 = 132$ et finalement à :
$x = 14 - \sqrt{132} \approx 2{,}51$ ou $x = 14 + \sqrt{132} \approx 25{,}49$

Problème 13 Résolution générale de $a\,x\,2 + b\,x + c = 0$ ($a \neq 0$) page 53

Voir page 54 et la synthèse page 61

Problème 14 Equations du second degré page 55

a) $\Delta = 225 > 0$ donc l'équation a deux solutions $S = \{8 ; 14\}$ **b)** $\Delta = 144 > 0$, $S = \{7 ; 3\}$

c) $\Delta = -31{,}36 < 0$ donc l'équation n'a pas de solutions. **d)** $\Delta = 42$, $S = \left\{\frac{24-\sqrt{42}}{3} ; \frac{24+\sqrt{42}}{3}\right\}$

Problème 15 Le vol parabolique du cormoran page 55

$\Delta = (-9)^2 - 4\,(1)\,(20) = 1$ donc le cormoran franchira deux fois le niveau de la mer, aux points d'abscisses 4 et 5.

Problème 16 Le canon contre le château page 55

Le discriminant de l'équation $-0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x - 10 = 0$ est $\Delta = 0{,}1216$.

L'équation a donc deux solutions qui sont : $\frac{-0{,}96-\sqrt{0{,}1216}}{2(-0{,}02)} \approx 32{,}72$ et $\frac{-0{,}96+\sqrt{0{,}1216}}{2(-0{,}02)} \approx 15{,}28$.

Comme le coefficient de x^2 est négatif, la fonction $x \mapsto -0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x - 10$ a un maximum situé entre les deux solutions, donc elle est positive entre ces solutions.
Pour atteindre les ennemis, il faudra placer le canon entre 15,3 m et 32,7 m du premier mur.

La question était ici de résoudre l'inéquation $-0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x \geq 10$, qui équivaut à : $-0{,}02\,x^2 + 0{,}96\,x - 10 \geq 0$, ce qui revient à étudier le signe du trinôme.
Si le discriminant est strictement négatif, le trinôme n'a pas de racines, il est soit strictement positif, soit strictement négatif, du même signe que le maximum y_S qui, dans ce cas, a le même signe que a.
Si le discriminant est strictement positif, comme ici, le trinôme a exactement deux racines et le maximum y_S est atteint entre ces deux racines. Or, dans ce cas, y_S a le signe contraire de a.
Le trinôme a donc le même signe que *a* sauf lorsque *x* est entre les racines.
Si le discriminant est nul, le trinôme a le signe de a sauf en x_S où il vaut $y_S = 0$.
Dans tous les cas, pour étudier le signe du trinôme, il est bon d'avoir en tête l'allure de la courbe et sa position par rapport à l'axe horizontal.

Problème 17 L'atterrissage page 55

Pour que l'atterrissage soit réussi en douceur, il faut et il suffit que le discriminant Δ soit nul.
Or $\Delta = (-400)^2 - 4\,a\,(20\,000) = 160\,000 - 80\,000\,a$ donc $a = 2$.
Et dans ce cas, la racine double est : $t = \frac{-(-400)}{2(2)} = 100$.

Problème 18 Demi-paraboles d'axe horizontal page 55

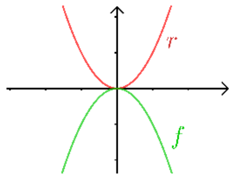
Les courbes de f et t « démarrent » 5 unités après celle de la fonction racine carrée, et pour trouver leurs images, il faut aller chercher la racine carrée du nombre placé 5 unités avant.
Donc $f(x) = \sqrt{x-5}$ et $t(x) = -\sqrt{x-5}$.
La courbe de s est une unité en dessous de la courbe d'équation $y = -\sqrt{x}$.
Donc $s(x) = -\sqrt{x} - 1$.
La courbe de g « démarre » 3 unités après celle de la fonction racine carrée, et elle est déplacée de 2 unités vers le haut donc $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$.

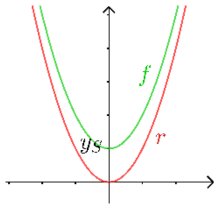
SYNTHÈSE : FONCTIONS ASSOCIÉES

Pour trouver l'équation d'une courbe ou la formule d'une fonction, il est souvent intéressant de partir de la courbe d'une fonction de référence et d'obtenir la courbe voulue par translation ou dilatation selon un axe vertical, ce qui correspond à composer la fonction de référence par une fonction affine.
Pour modéliser des fonctions représentées par des paraboles d'axe vertical ou horizontal, nous n'utiliserons que les fonctions de référence carré $x \mapsto x^2$ et racine carré $x \mapsto \sqrt{x}$.

Fonctions associées à la fonction $\boldsymbol{r : x \mapsto x^2}$ de courbe $\boldsymbol{C_r}$ dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$:

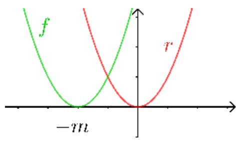
Si f est définie par $f(x) = -x^2$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe horizontal $(O\,;\,\vec{\imath})$.

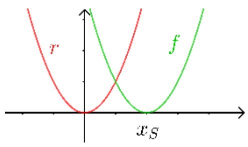




Si f est définie par $f(x) = x^2 + y_S$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $y_S\vec{\jmath}$.

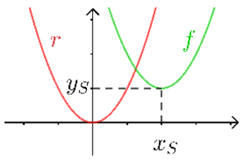
Si f est définie par $f(x) = (x + m)^2$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $-m\vec{\imath}$.

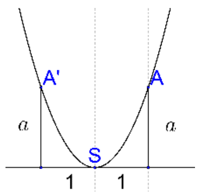




Si f est définie par $f(x) = (x - x_S)^2$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $x_S\vec{\imath}$.

Si f est définie par $f(x) = (x - x_S)^2 + y_S$, $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $x_S\vec{\imath} + y_S\vec{\jmath}$.





Si f est définie par $f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$, alors $f(x_S + 1) - f(x_S) = a$.

Pour la fonction de référence $\boldsymbol{r : x \mapsto r(x)}$ de courbe $\boldsymbol{C_r}$

Si f est définie par $f(x) = -r(x)$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la symétrie par rapport à $(O\,;\,\vec{\imath})$.

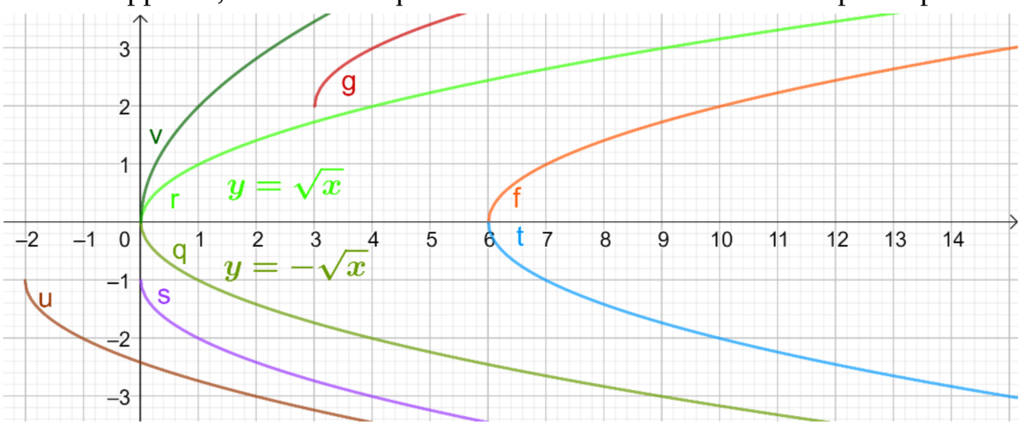
Si f est définie par $f(x) = r(x) + k$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $k\vec{\jmath}$.

Si f est définie par $f(x) = r(x + m)$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $-m\vec{\imath}$.

Si f est définie par $f(x) = r(x - m)$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $m\vec{\imath}$.

Si f est définie par $f(x) = r(x - m) + k$ alors $\boldsymbol{C_f}$ est l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par la translation de vecteur $m\vec{\imath} + k\vec{\jmath}$.

Si f est définie par $f(x) = k\,r(x)$ avec $k > 0$, alors $\boldsymbol{C_f}$ l'image de $\boldsymbol{C_r}$ par une dilatation verticale de rapport k, c'est-à-dire que toutes les ordonnées sont multipliées par k.



$r(x) = \sqrt{x}$; $q(x) = -\sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x-6}$

$t(x) = -\sqrt{x-6}$

$g(x) = \sqrt{x-3} + 2$

$s(x) = -\sqrt{x} - 1$

$u(x) = -\sqrt{x+2} - 1$

$v(x) = 2\sqrt{x}$

SYNTHÈSE : FONCTIONS TRINÔMES

I Rappels

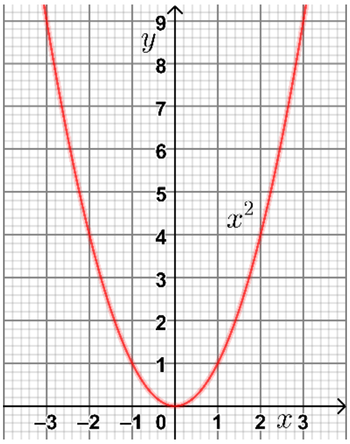
Variations :
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I signifie que :
pour tous les nombres réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I signifie que :
pour tous les nombres réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

Fonction carré :
Signe :
Le carré d'un nombre réel est toujours **positif ou nul**.

Tableau de variation et courbe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Résolution de $x^2 = k$ dans $\mathbb{R}$:
Si $k > 0$ alors l'équation $x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.

Si $k = 0$ alors l'équation $x^2 = k$ équivaut à $x = 0$ (elle a une seule solution 0).

Si $k < 0$ alors l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Identités remarquables :

$$\xrightarrow{\text{développer}}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\xleftarrow[\text{factoriser}]{}$$

II Forme développée et forme canonique d'un trinôme

La fonction f est un trinôme si son expression développée est $f(x) = a x^2 + b x + c$ avec $a \neq 0$.

Deux trinômes $a x^2 + b x + c$ et $a' x^2 + b' x + c'$ sont égaux sur intervalle ouvert non vide si et seulement si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Tout trinôme $a x^2 + b x + c$ a une forme canonique $a(x - x_S)^2 + y_S$ où $x_S = \frac{-b}{2a}$ et $y_S = f(x_S)$.

Le coefficient a est le même dans la forme développée et dans la forme canonique.

Si $a > 0$ alors la fonction f admet un **minimum** sur $\mathbb{R}$ en $x = x_S$ qui est égal à $f(x_S) = y_S$.

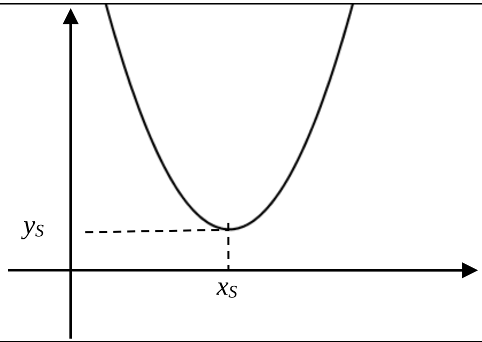
De plus, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\, x_S]$ et f est strictement croissante sur $[x_S\,;\,+\infty[$.

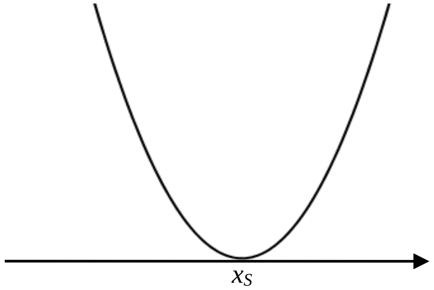
Si **$a < 0$** alors la fonction f admet un **maximum** sur $\mathbb{R}$ en $x = x_S$ qui est égal à $f(x_S) = y_S$.

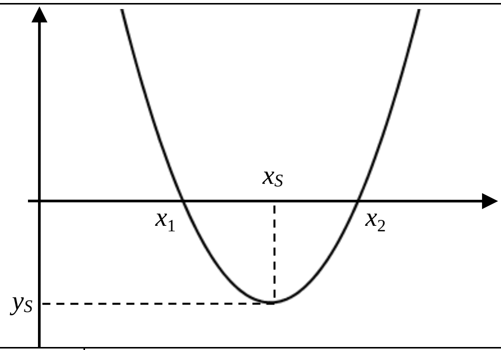
De plus, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\, x_S]$ et f est strictement décroissante sur $[x_S\,;\,+\infty[$.

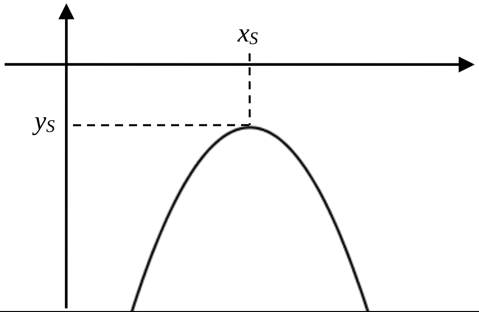
III Allure de la courbe et formules du trinôme

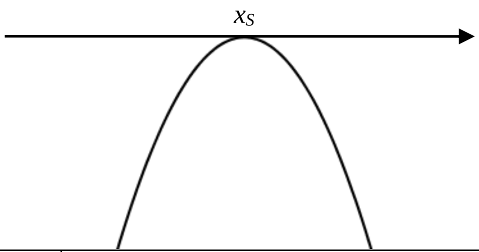
Trinôme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ $f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ avec $x_S = -\dfrac{b}{2\,a}$ et $y_S = f(x_S)$

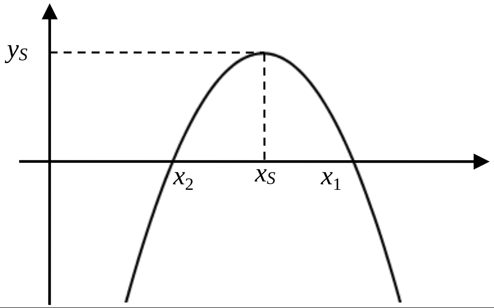
<table>
<tr><td></td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_S</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0 –</td><td>0</td><td>+</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>–</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_S</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>–</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>–</td><td>0 +</td><td>0</td><td>–</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Racines
Solutions de
$f(x) = 0$</td><td>Pas de racine.</td><td>$x_S = x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2\,a}$</td><td>$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation</td><td>Pas de factorisation</td><td>$a\,(x - x_S)^2$</td><td>$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$</td></tr>
</table>

SYNTHÈSE SUR LES MÉTHODES

Les explications renvoient à des problèmes traités : le premier numéro indique le problème et le second la page des indications adaptées. Ainsi (Pb18/P9) renvoie au problème 18 page 9.

1. Utiliser le lien entre l'analyse et la géométrie

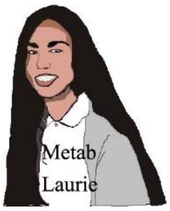
Les paraboles sont des objets géométriques auxquels on peut appliquer des transformations géométriques, notamment des translations. Celles qui ont un axe vertical ont une équation du type $y = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a \neq 0$ dans un repère orthonormé donné. Ce sont aussi les courbes de fonctions trinômes. Chaque transformation géométrique va modifier la formule du trinôme associé. Comprendre le lien entre les transformations et les fonctions associées permet de trouver une formule de fonction à partir d'une fonction de référence en observant les points particuliers de sa courbe. C'est l'enjeu du problème 1 page 46 et de la synthèse page 59.

Il faut d'abord que la courbe de la fonction soit une parabole d'axe vertical, puis repérer les coordonnées $(x_S\,;\,y_S)$ du point d'intersection de cet axe avec la parabole, repérer si ce point correspond à un minimum ou un maximum, ce qui donne le signe de a (respectivement positif ou négatif). La courbe est alors l'image de celle de la fonction $x \mapsto a\,x^2$ par la translation de vecteur $x_S\vec{\imath} + y_S\vec{\jmath}$ et la formule de la fonction est $f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$.

Pour déterminer a, on peut remarquer que $f(x_S + 1) - f(x_S) = a$, ce qui ressemble à la technique du coefficient directeur d'une droite mais n'est valable qu'en partant du sommet S de la parabole. D'ailleurs a ne s'appelle pas le coefficient directeur du trinôme mais on peut l'appeler le coefficient du carré.

Savoir trouver la forme canonique à partir d'une expression algébrique (Pb9P51) permet de résoudre des problèmes de géométrie. La formule d'un trinôme peut représenter l'aire d'une surface constituée de figures géométriques ; en effet si x peut représenter une longueur, x^2 représente l'aire du carré de côté x, et $x = 1\,x$ représente l'aire du rectangle de côtés 1 et x. Voir (Pb5P50). C'est une autre façon de voir les formules algébriques et cela peut permettre de se rappeler les identités remarquables (Pb6P50).

2. Utiliser un tableau de valeurs



Le tableau de valeurs permet tracer la courbe, ou bien, connaissant la courbe, on peut réaliser un tableau de valeurs. Dans le premier cas, il est possible de faire le calcul mentalement à l'aide de la formule canonique si on connaît bien les carrés. Dans le deuxième cas, on peut observer l'effet d'une transformation géométrique ; on peut aussi se servir du tableau de valeurs pour vérifier que différentes expressions correspondent bien à la même fonction.

3. Utiliser des fonctions

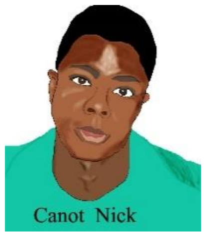
Pour modéliser un phénomène d'après sa courbe, il est utile de repérer la fonction de référence qui a une courbe de la même forme. Une parabole d'axe vertical fait référence à la fonction carré, cependant « l'ouverture » de la parabole pourra être différente. Pour obtenir la même courbe par translation, il faudra prendre pour référence $x \mapsto a\,x^2$ avec $a \neq 0$.

Dans le premier problème page 45, on voit qu'un décalage horizontal correspond à un changement de variable et à une composition avant la fonction de référence. De façon générale, une composition de fonctions correspond à une transformation de la courbe.

Exemple avec $r(x) = 12 - 3\,x^2$ et $g(t) = r(t - 4) = 12 - 3\,(t - 4)^2$

$t \mapsto t - 4 = x$	$\mapsto\ x^2 = k$	$\mapsto -k = -x^2 = u$	$\mapsto 3\,u = -3\,x^2 = m$	$\mapsto m + 12 = 12 - 3\,x^2$
Changement de variable Translation horizontale de 4 unités vers la droite.	Fonction de référence	Opposé Symétrie / (Ox)	Fonction linéaire Dilatation verticale ordonnées × 3	Ajout d'une constante Translation verticale de 12 unités vers le haut.

4. Utiliser la forme canonique



La forme canonique est l'écriture algébrique qui rend le mieux compte de la composition des fonctions pour obtenir un trinôme donné comme indiqué dans le paragraphe précédent. Elle peut être obtenue en observant la courbe si le sommet S(x_S ; y_S) de la parbole est connu de façon précise, et au moins un autre point, notamment celui d'abscisse $x_S + 1$ comme indiqué au paragraphe 1. L'obtenir par factorisation partielle à l'aide des identités remarquable à partir de la forme développée est plus difficile. C'est aussi possible par identification voir (Pb9P52).

Mais le plus simple consiste à se rappeler que la forme canonique de $a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a \neq 0$, est $a\,(x - x_S)^2 + y_S$ avec $x_S = \frac{-b}{2a}$ et $y_S = f\,(x_S)$, le coefficient du carré a est le même dans la forme développée et dans la forme canonique.

Outre la possibilité de tracer rapidement la courbe, voir (Pb3P48), la forme canonique donne l'accès à la factorisation lorsqu'elle est possible, à la résolution d'équations du second degré, à la démonstration de l'extremum (minimum ou maximum) (Pb2P48) et même à la démonstration des variations en utilisant celles de la fonction carré.

Exemple avec $g(x) = 12 - 3\,(x - 4)^2$:

Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques de $]-\infty\,;\,4]$ tels que $x_1 < x_2$ alors : $x_1 < x_2 \leq 4$ $x_1 - 4 < x_2 - 4 \leq 0$ $(x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ $-3\,(x_1 - 4)^2 < -3\,(x_2 - 4)^2$ $12 - 3\,(x_1 - 4)^2 < 12 - 3\,(x_2 - 4)^2$ $g(x_1) < g(x_2)$ Pour tous les réels x_1 et x_2 de $]-\infty\,;\,4]$ tels que $x_1 < x_2$ on a $g(x_1) < g(x_2)$ donc la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,4]$.	Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques de $[\,4\,;\,+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$ alors : $4 \leq x_1 < x_2$ $0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4$ $(x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$ $-3\,(x_1 - 4)^2 > -3\,(x_2 - 4)^2$ $12 - 3\,(x_1 - 4)^2 > 12 - 3\,(x_2 - 4)^2$ $g(x_1) > g(x_2)$ Pour tous les réels x_1 et x_2 de $[4\,;\,+\infty\,[$ tels que $x_1 < x_2$ on a $g(x_1) > g(x_2)$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $[4\,;\,+\infty\,[$.

5. Utiliser une lettre ou résoudre une équation

Si un problème (Pb10P54) comporte plusieurs variables ou plusieurs inconnues, on utilise une relation entre elles pour les exprimer en fonction d'une seule et étudier les variations ou résoudre l'équation.

Si on connaît la forme canonique du trinôme, on peut alors résoudre l'équation en l'écrivant sous la forme $(x - x_S)^2 = -\,y_S/a$ en utilisant la résolution de $X^2 = k$:

Si $k > 0$ alors $X^2 = k$ équivaut à $X = -\sqrt{k}$ ou $X = \sqrt{k}$

Si $k = 0$ alors $X^2 = 0$ équivaut à $X = 0$

Si $k < 0$ alors $X^2 = k$ n'a pas de solution.

Si on connaît la forme factorisée du trinôme, on pourra utiliser la propriété : « Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul ».

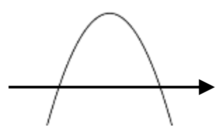
Si on ne dispose que de la forme développée $a\,x^2 + b\,x + c$, ou si on peut facilement la retrouver, on peut alors utiliser directement les résultats de ce chapitre : calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ puis les solutions si $\Delta \geq 0$ (voir page 61).

6. Résoudre une inéquation du second degré

On peut utiliser la résolution de $X^2 \geq k$ ou $X^2 \leq k$ si le premier membre est un carré ou est sous la forme canonique. On peut aussi utiliser un tableau de signes si le premier membre est factorisé et le deuxième membre est nul.

Par exemple, si $f\,(x) = (a\,x + b)\,(c\,x + d)$ avec $a > 0$, $c < 0$ et $-\,d/c < -\,b/a$:

x	$-\infty$		$-\,d/c$		$-\,b/a$		$+\infty$
signe de $a\,x + b$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
signe de $c\,x + d$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
signe de $f\,(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



Mais si le premier membre n'est pas sous la forme canonique, ou s'il est factorisé mais que le deuxième membre n'est pas nul, on reporte tous les termes dans le premier membre, on développe et la question revient à étudier le signe d'un trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$. Dans ce cas, l'observation des signes de a et de Δ permet de déterminer laquelle des 6 configurations de la page 61 est concernée et d'en déduire le signe du trinôme.

On peut retenir la règle :

Le signe du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ est celui de a sauf lorsque x est entre les racines s'il y en a.

7. Utiliser les transformations algébriques

Ce chapitre utilise astucieusement des transformations algébriques.

La mise sous forme canonique en complétant un carré puis la factorisation éventuelle en est un exemple classique (Pb5P50), (Pb7P51) et (Pb13P54). Cela représente une certaine virtuosité.

L'essentiel est d'être capable de passer d'une des trois formes à une autre et de choisir la forme adaptée au problème.

Forme canonique
$a\,(x - x_S)^2 + y_S$

Si $-\,y_S\,/a$ est un nombre positif.

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$

$x_S = \frac{-b}{2a}$ et $y_S = f\,(x_S)$

Forme développée
$a\,x^2 + b\,x + c$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$
Si Δ est un nombre positif.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$x_1 = \dfrac{-\,b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$

$x_2 = \dfrac{-\,b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$

Forme factorisée si elle existe
$a\,(\,x - x_1\,)\,(\,x - x_2\,)$

Forme	Utile pour :	Éléments caractéristiques
Développée Forme standard $a\,x^2 + b\,x + c$	Addition de trinômes. Égalité par identification des coefficients. Image de 0, formules du trinôme : calcul de Δ.	a : coefficient du carré b : coefficient de la variable c : terme constant
Canonique « outil à tout faire » $a\,(x - x_S)^2 + y_S$	Trouver les coordonnées du sommet. Tracer rapidement la courbe. Trouver et justifier les variations. Résoudre. Factoriser si c'est possible.	a : coefficient du carré, sens et ouverture de la parabole. x_S : abscisse du sommet y_S : ordonnée du sommet
Factorisée Forme spéciale qui n'existe pas toujours. $a\,(\,x - x_1\,)\,(\,x - x_2\,)$ ou $(a'\,x + b)\,(c\,x + d)$	Résoudre. Intersections avec l'axe des abscisses. Étudier le signe. Trouver un facteur commun avec un autre trinôme ou polynôme.	a : coefficient du carré, sens et ouverture de la parabole. x_1 : première racine x_2 : deuxième racine