CHAPITRE 6 MAUD ÉLISEE FACE AU PHENOMENE EXPONENTIEL

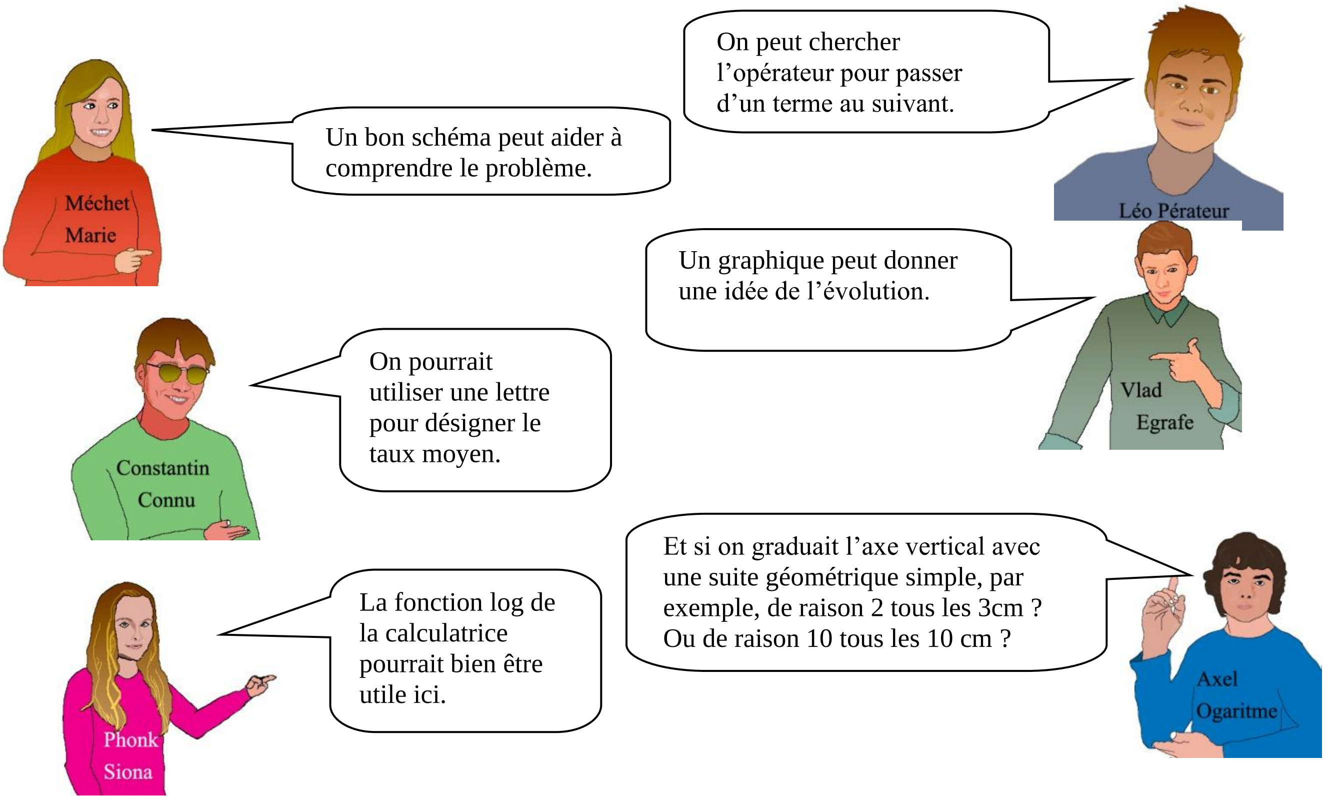
<u>Problème N°1.</u> La population des États-Unis au XIX° siècle

Voici un tableau concernant la population (en millions d'habitants) des Etats-Unis.
Maud Élisée cherche un modèle mathématique qui rende compte de son évolution afin d’évaluer la population pendant les années intermédiaires.

Rang n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Année	1800	1820	1840	1860	1880
Population P_n	5,7	9,6	17	31	50

a) Comment décrire mathématiquement l’évolution de la population ?
b) Quel est le pourcentage moyen d’augmentation de la population par décennie ? Estimer la population en 1830.
c) Quel est le pourcentage moyen d’augmentation de la population par an ?
d) Comment définir une fonction continue qui modélise l’évolution de la population de 1800 à 1880 ?

Tu peux chercher par toi-même ou t’inspirer des méthodes ci-dessous.
Avoir étudié les chapitres précédents est nécessaire pour aborder celui-ci.

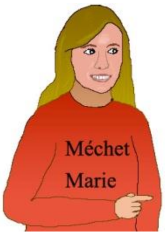


***Après avoir cherché par toi-même**, puis avoir échangé avec tes voisins s’il s’agit d’un travail de groupe, tu peux regarder les pages suivantes où les méthodes sont détaillées.*
Compare ces méthodes et assure-toi qu’elles donnent des résultats comparables.
Dans les pages suivantes, tu trouveras d’autres problèmes où tu pourras réutiliser ces méthodes, puis une synthèse sur les notions mathématiques utilisées ici.

Problème 1 La population des États-Unis au XIX° siècle *Détails des méthodes*

Chercher l'opérateur

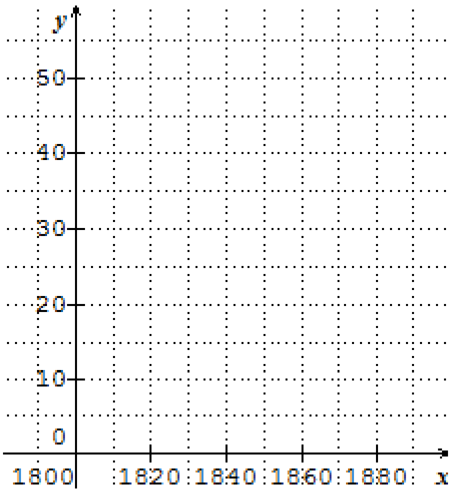
1) On peut chercher l'opérateur en complétant le tableau ci-dessous. Pour passer d'un nombre de la population au suivant, l'opérateur est-il plutôt une addition ou une multiplication ?

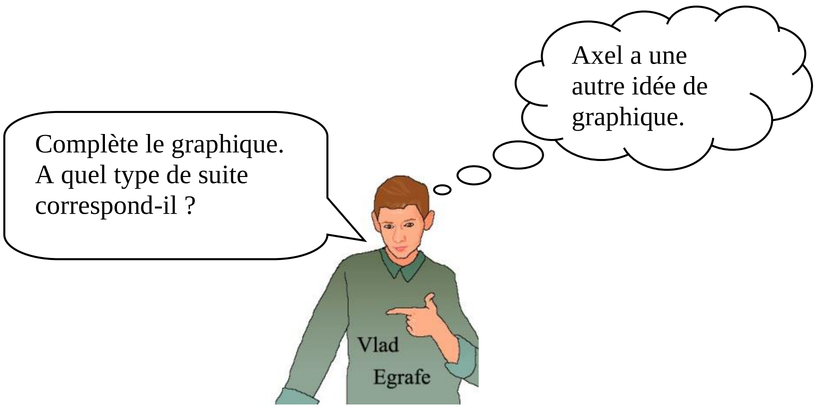


Année	1800	1820	1840	1860	1880
Population	5,7	9,6	17	31	50

Les nombres de la deuxième ligne du tableau ne sont pas exactement ceux d'une suite arithmétique ni géométrique, mais duquel de ces deux types de suite se rapprochent-ils le plus ?

Faire un graphique





Essaye de trouver la raison d'une suite adaptée qui permettrait d'obtenir approximativement les nombres de la deuxième ligne, en commençant à $P_0 = 5{,}7$ avec $P_2 = 17$ et regarde ce que deviennent alors P_1, P_3 et P_4.

Recommence avec les conditions $P_0 = 5{,}7$ avec $P_4 = 50$.
Quelle équation vérifie la raison ?

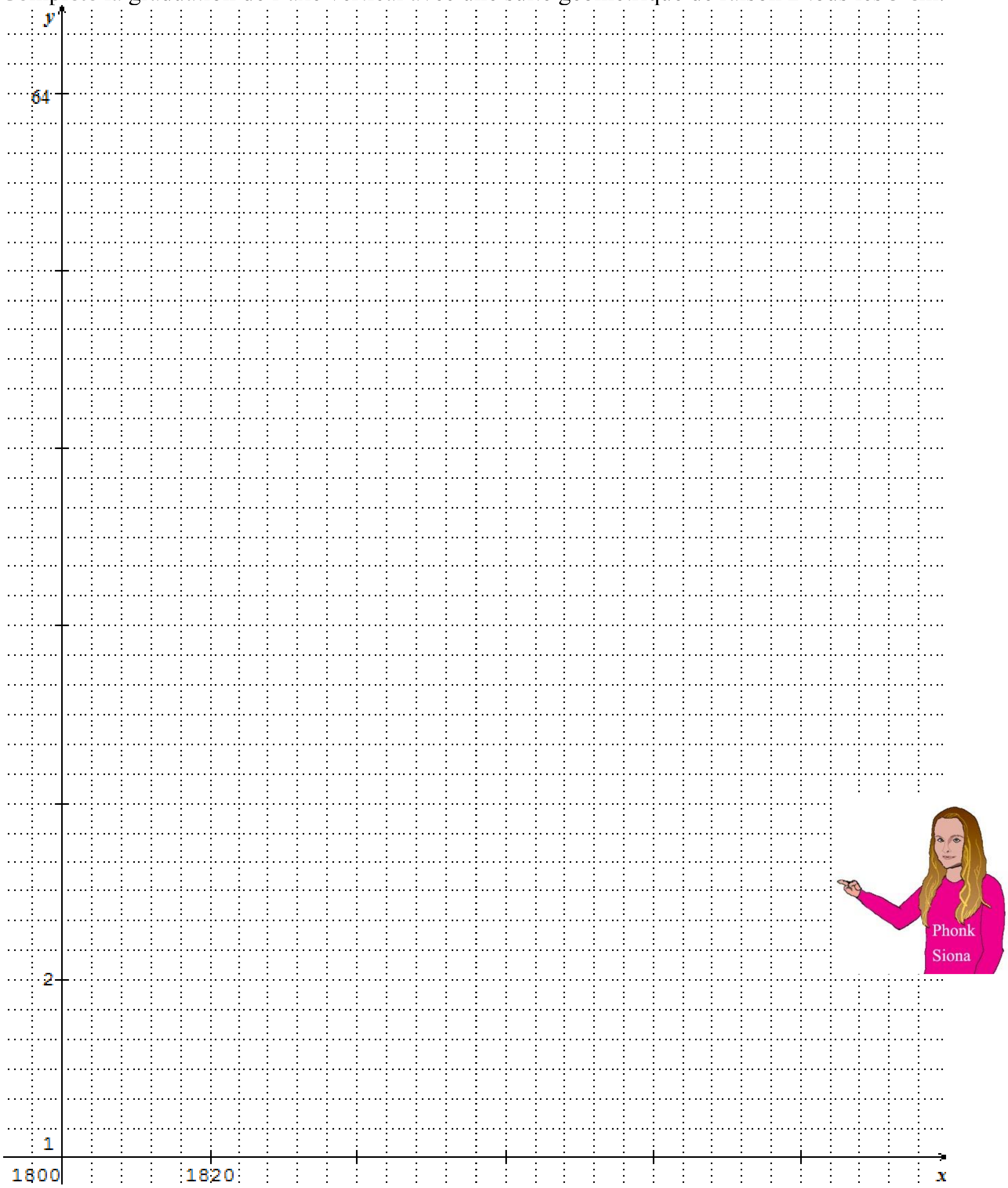
Comment trouver la raison qui correspondrait à une décennie avec $u_0 = 5{,}7$ et $u_8 = 50$?
A quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

Comment trouver la raison qui correspondrait à une année avec $v_0 = 5{,}7$ et $v_{80} = 50$?
A quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

Utiliser un axe logarithmique

Le graphique réalisé dans un repère cartésien ne permet pas de déterminer précisément une valeur intermédiaire parce que la courbe est arrondie, d'où l'idée de graduer l'axe vertical selon une suite géométrique. La plus simple commence à 1 et double à chaque étape. On verra que doubler tous les 3 cm facilitera le travail ultérieur.

Complète la graduation de l'axe vertical avec une suite géométrique de raison 2 tous les 3 cm.

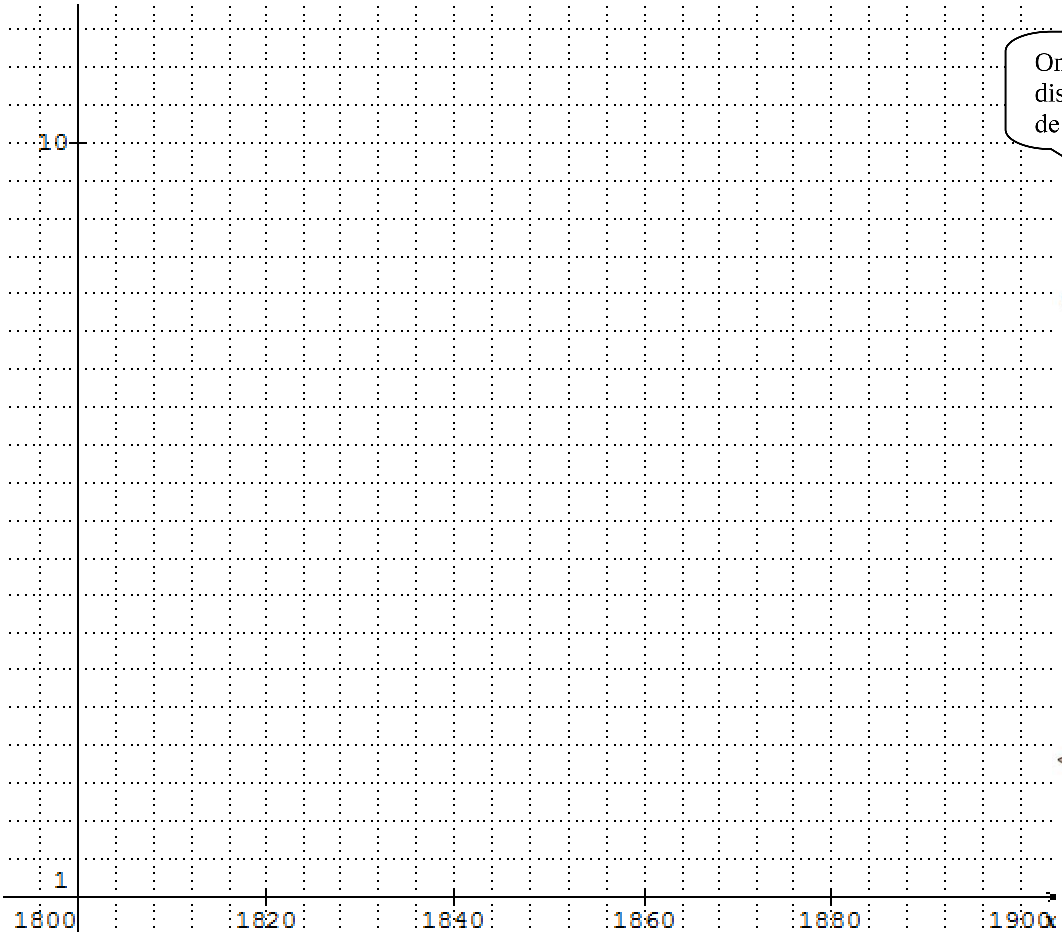


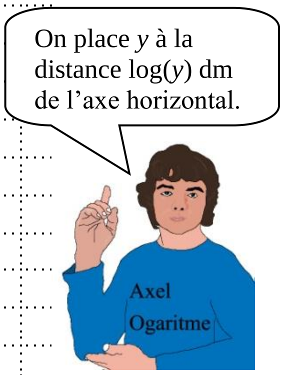
Quelle est la raison d'une suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_3 = 2$? Calcule les termes à placer à chaque centimètre : u_1, u_2, u_3, u_4,… et écris-les sur l'axe. Que vaut u_{10} ?

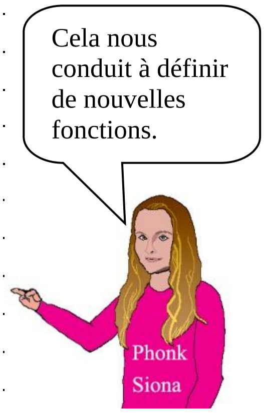
Il serait possible de faire une graduation tous les 1 mm et aussi fine que voulu. Ceci nous amène à penser qu'à chaque point de la droite situé à une distance de z dm de l'origine 1 correspond un nombre y. Et qu'il existe une fonction qui à chaque nombre $y (y \geq 1)$ associe la distance z en dm entre l'origine 1 et le point correspondant à ce nombre y de la graduation.

Calcule à la calculatrice log(2), log(4), log(8), log(10) et compare avec les distances de 1 à 2, de 1 à 4… Pour que les distances soient exactement les valeurs de log(2), log(4), log(8), log(10), il suffit de graduer l'axe vertical avec une suite géométrique de raison 10 tous les 10 cm, en commençant par 1. Tu verras à la page suivante comment utiliser ce graphique.

Reproduis et complète la graduation de l'axe vertical avec une suite géométrique de raison 10 tous les 10 cm. (Le graphique ci-dessous est incomplet pour placer tous les points)







Si y est un nombre à placer sur l'axe vertical, alors il est précisément à $z = \log(y)$ dm de l'axe horizontal.
Réciproquement, à 0,1 dm de l'axe horizontal, se trouve le nombre $\sqrt[10]{10} = 10^{1/10} = 10^{0,1}$.
Puis à 0,2 dm se trouve le nombre $\sqrt[10]{10}^{\,2} = (10^{0,1})^2 = 10^{0,2}$, à 0,3 dm se trouve $\sqrt[10]{10}^{\,3} = 10^{0,3}$ et plus généralement, à z dm se trouve 10^z.
Cela se vérifie pour 1 dm, on trouve $10^1 = 10$, pour 2 dm, on trouve $10^2 = 100$…
Schématiquement :

Nombre sur l'axe vertical $y \xrightarrow{\log} z = \log(y)$ Distance à l'axe horizontal (en dm).

Distance à l'axe horizontal $z \xrightarrow{\exp_{10}} y = 10^z$ Nombre sur l'axe vertical

Place les points correspondant au tableau de la population sur le graphique, trace une droite qui passe au plus près de ces points. Repère 1830 sur l'axe horizontal, trouve le point correspondant sur la droite, mesure la distance de ce point à l'axe horizontal et calcule le nombre correspondant. Compare le résultat avec l'estimation que l'on pouvait faire avec le taux correspondant à une décennie.
Les points du graphique semblent être alignés selon une droite d'équation $z = a\,x + b$ (en dm et années). Détermine approximativement a et b. Puis à l'aide de la relation $y = 10^z$, trouve la relation entre y et x.

Attention, les phénomènes exponentiels ne correspondent pas tous à des fonctions croissantes.
Pour aller vers une synthèse, le problème N°1 est corrigé page **82** *et la synthèse est juste après.*

Problème N°2. La loi de Moore

En 1965, l'un des trois fondateurs de l'entreprise Intel, Moore, remarque que la complexité des semi-conducteurs doublait tous les ans. Ce phénomène s'est appelé la loi de Moore. En réalité, tout évolue, les composants, les logiciels, les mémoires… Cependant, nous pouvons observer le nombre de transistors (en millions) sur les cartes graphiques GPU de 1999 à 2008.

année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
nombre	23	30	60	107	135	222	321	681	754	1400

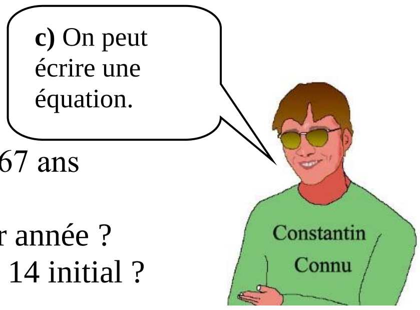
a) Calculer le pourcentage d'augmentation d'une année à la suivante. Est-il constant ?
b) Calculer le taux d'évolution moyen entre 1999 et 2008, et comparez les nombres du tableau avec une suite géométrique commençant à 23 avec ce taux d'évolution.
c) Réaliser un graphique en utilisant un axe vertical gradué selon une suite géométrique en multipliant par 10 tous les 10 cm. Si on commence à 1, il faut 32 cm de haut, si on commence à la graduation à 10, il suffit de 22 cm. Placer alors les points en utilisant la fonction log qui donne la distance par rapport à l'ordonnée 1.
Les points sont-ils à peu près alignés ?
d) Tracer une droite qui passe par le premier et le dernier point du graphique. Quel est le coefficient directeur de cette droite (en cm/an) ? Combien faut-il d'années pour doubler le nombre de transistors, c'est-à-dire augmenter l'ordonnée d'environ 3 cm ?

Problème N°3. Datation au Carbone 14

Un élément radioactif dit « **élément père** » P se désintègre spontanément en un autre élément « **l'élément fils** » F en émettant une particule riche en énergie : rayonnement β (électrons) ou γ (photons). Quelle que soit la quantité d'élément père présente au départ, il faut toujours le même temps pour que cette quantité soit réduite de moitié.
Cette durée caractéristique est sa période radioactive T ou demi-vie. Pour le Carbone 14, cette période est de 5 734 ans. On peut aussi remarquer que pour une durée fixée, le pourcentage de diminution est toujours le même. C'est ce que nous allons préciser.

a) Quel est le pourcentage de diminution correspondant à une demi-vie ?
b) Quelle est la nature de la suite correspondant au pourcentage de Carbone 14 non désintégré et quelle est sa raison ?

Nombre de demi-vies	0	1	2	3	4
Temps écoulé	0	5 734	11 468	17 202	22 936
Pourcentage restant	100	50	25		



c) Quelle proportion du Carbone 14 initial s'est désintégrée en 2867 ans (2867 = 5734 : 2) ?
d) Quel est le pourcentage de diminution du Carbone 14 initial par année ?
e) Au bout de combien de temps, il ne reste que 40 % du Carbone 14 initial ?

Problème N°4. Le médicament

Le corps humain absorbe en 12 heures 80 % d'un médicament présent dans le sang et les 20 % restants continuent à circuler dans le sang.
On suppose que le pourcentage absorbé chaque heure est constant.

a) Quel pourcentage du médicament restera-t-il dans le sang au bout de 24 heures ?
b) Quel pourcentage du médicament a été absorbé par le corps chaque heure ?
c) Donne la formule de la fonction continue qui au temps t en heures associe le pourcentage de médicament présent dans le sang.

CHAPITRE 7 RÉPONSES

Problème 1 La population des États-Unis au XIX° siècle page 77

a) La population augmente approximativement selon une suite géométrique de raison 1,72.

b) On calcule $\sqrt[8]{\frac{50}{5{,}7}} = \left(\frac{50}{5{,}7}\right)^{1/8} \approx 1{,}312$. Ce qui donne 5,7 × 1,312 ≈ 12,9 en 1830.

Le pourcentage moyen d'augmentation de la population par décennie est environ de 31,2 %.

c) On calcule $\sqrt[80]{\frac{50}{5{,}7}} = \left(\frac{50}{5{,}7}\right)^{1/80} \approx 1{,}0275$.

Le pourcentage moyen d'augmentation de la population par an est environ de 2,75 %.

d) Définir une fonction continue qui modélise l'évolution de la population de 1800 à 1880.

On réalise un graphique avec un axe vertical gradué selon une suite géométrique en multipliant par 10 tous les 10 cm, et commençant à 1. On calcule les logarithmes décimaux (log) des nombres de la dernière ligne du tableau. On place les points dont les coordonnées sont :

Années après 1800	0	20	40	60	80
Ordonnée en dm	0,75587	0,98227	1,2304	1,4914	1,699

On trace une droite qui passe au plus près de ces points et on estime le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine : $a \approx 0{,}0118$ et $b \approx 0{,}75587$ (en prenant les points extrêmes).

Pour x années après 1800, la population est environ :

$$10^{ax+b} \approx 10^{0{,}0118x+0{,}75587} = 10^{0{,}75587} \times (10^{0{,}0118})^x \approx 5{,}7 \times 1{,}0275^x$$

Ce qui correspond à une augmentation moyenne de 2,75 % par an. On retrouve ainsi le calcul de la question précédente, mais ici, il s'agit d'une fonction continue et non plus d'une suite géométrique par période d'un an.

Problème 2 La loi de Moore page 81

a) Le pourcentage d'augmentation d'une année à la suivante n'est pas constant.

année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
nombre	23	30	60	107	135	222	321	681	754	1400
Pourcentage d'augmentation		30,4	100	78,3	26,1	64,4	44,6	112	10,7	85,7

b) Le coefficient multiplicateur moyen entre 1999 et 2008 est :

$$q = \sqrt[9]{\frac{1400}{23}} = \left(\frac{1400}{23}\right)^{1/9} \approx 1{,}579$$

donc le pourcentage d'augmentation moyen entre 1999 et 2008 est 57,9 %.

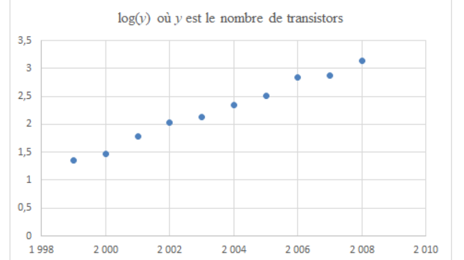
Comparons les données avec une suite géométrique de raison q :

année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
nombre y	23	30	60	107	135	222	321	681	754	1400
Suite géométrique	23	36	57	90	143	225	356	562	887	1400

Les nombres restent du même ordre de grandeur.

c) Réalisation du graphique

année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
log(y)	1,36	1,48	1,78	2,03	2,13	2,35	2,51	2,83	2,88	3,15



c) Les points sont à peu près alignés.

d) log(23) ≈ 1,36 et log(1400) ≈ 3,15

$\frac{3{,}15-1{,}36}{2008-1999} \approx 0{,}2$ dm/an soit 2 cm/an.

Pour doubler le nombre de transistors soit une augmentation d'environ 3 cm, car log(2) ≈ 0,3 , il faudra environ 1,5 ans soit **18 mois**.

Problème 3 Datation au Carbone 14 page 81

a) La quantité de Carbone 14 diminue de 50 % à chaque demi-vie, tous les 5734 ans.

b) Les pourcentages de Carbone 14 non désintégré à chaque demi-vie forment une suite géométrique de raison 0,5.

Nombre de demi-vies	0	1	2	3	4
Temps écoulé	0	5 734	11 468	17 202	22 936
Pourcentage restant	100	50	25	12,5	6,25

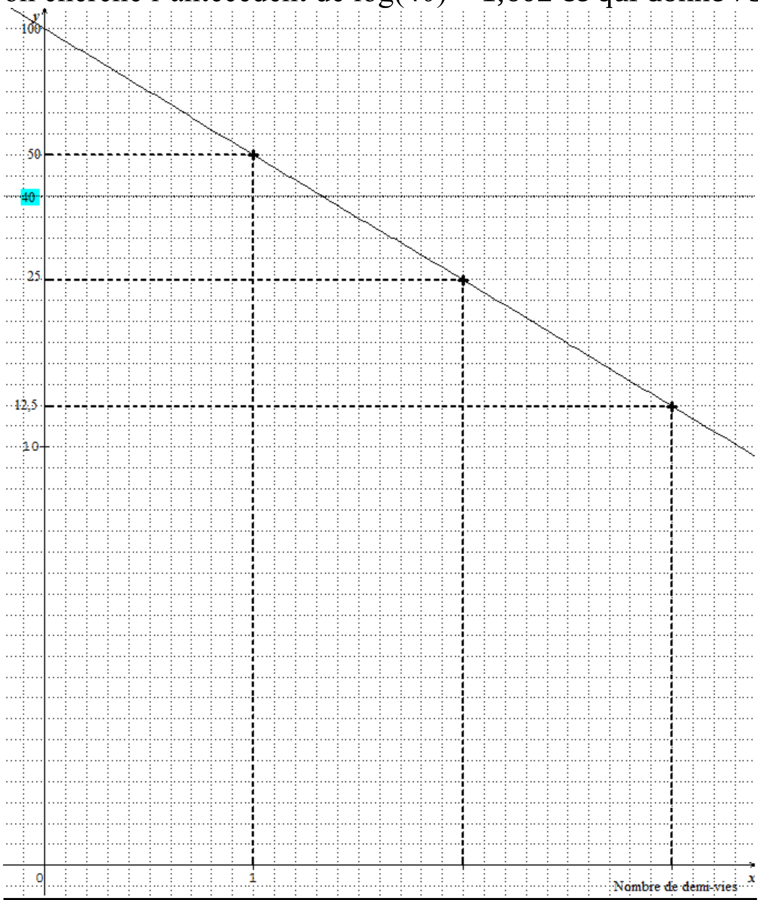
c) On considère la suite géométrique de raison q et telle que u_0 =100 et u_2 = 50, alors $u_2 = q^2\, u_0$ donc $100 = 50\, q^2$ on en déduit que $q = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$; de plus, 0,707 = 1 – 0,293.
Ainsi, en 2867 ans, environ 29,3 % du Carbone 14 s'est désintégré.

d) On considère la suite géométrique telle que v_0 =100 et v_{5734} = 50, sa raison est :
$\sqrt[5734]{0{,}5} = 0{,}5^{1/5734} \approx 0{,}99988$ soit une diminution de 0,012 % par an.

e) On peut utiliser un programme ou une fonction pour trouver le premier entier n tel que $100 \times 0{,}5^{n/5734}$ soit inférieur à 40. Ou résoudre l'équation $100 \times 0{,}5^{x/5734} = 40$ (si on sait utiliser les propriétés de la fonction log).
Ou on peut utiliser un graphique avec un axe vertical gradué selon une suite géométrique de raison 10 comme au problème 1.
On calcule les logarithmes décimaux (log) des nombres de la dernière ligne du tableau.

Temps écoulé	0	5 734	11 468	17 202	22 936
log du pourcentage	2	1,699	1,398	1,097	0,796

Les points correspondants sont alignés, selon une droite d'équation $z = -(0{,}301/5735)\, x + 2$ et on cherche l'antécédent de log(40) ≈ 1,602 ce qui donne 7580 ans environ.



Problème 4 Le médicament page 81

a) 0,2 × 0,2 = 0,04 soit 4 % **b)** $\sqrt[12]{0{,}20} \approx 0{,}8745$ soit une diminution de 12,55 % par heure.

c) $f(t) = 100 \times \left(\sqrt[12]{0{,}20}\right)^t = 100 \times (0{,}2^{1/12})^t = 100 \times 0{,}2^{t/12}$.

CHAPITRE 8 SYNTHESE : PHENOMENES EXPONENTIELS

Une situation qui peut être décrite par une suite géométrique non constante est appelée un phénomène exponentiel. Cela signifie que le taux d'évolution (augmentation ou diminution) est constant.
Si une situation peut être décrite par une fonction continue et que les images de toute suite arithmétique de l'ensemble de définition forment une suite géométrique, alors cette situation est aussi un phénomène exponentiel.
Dans le premier cas, nous parlerons de phénomène exponentiel discret, et dans le deuxième cas, nous parlerons de phénomène exponentiel continu.
Dans la réalité, les phénomènes exponentiels donnent seulement des valeurs numériques proches des modèles mathématiques.

I Modélisation par une suite géométrique

Pour modéliser un phénomène exponentiel discret à partir de données, on peut prendre la première et la dernière valeur, et calculer le taux moyen d'évolution entre ces deux valeurs.
Attention de u_0 à u_p, il y a $p + 1$ valeurs mais le taux moyen est obtenu en calculant :

$$\sqrt[p]{\frac{u_p}{u_0}} = \left(\frac{u_p}{u_0}\right)^{1/p}$$

Dans l'exemple de la population des Etats Unis, il y a 5 valeurs et le calcul est :

$\sqrt[4]{\frac{50}{5,7}} \approx 1{,}72$ soit une augmentation de 72 % en moyenne tous les 20 ans.

II Modélisation par une fonction continue

Considérons une situation qui peut être considérée comme un phénomène exponentiel continu.
On peut représenter la situation en utilisant une graduation verticale constituée d'une suite géométrique de raison a ($a > 0$ et $a \neq 1$) et dont le nombre situé à l'origine est 1.
La graduation verticale peut contenir des subdivisions aussi fines que l'on veut toujours constituées de termes d'une suite géométrique $a^{n/q}$. L'encadrement de tout réel z par des rationnels aussi proches de z que l'on veut conduit à un encadrement de a^z aussi fin que l'on veut et permet ainsi de définir le nombre a^z.
De plus, chaque nombre réel y strictement positif peut être approché aussi près que l'on veut par des termes d'une suite géométrique de la graduation. On en déduit que tout nombre réel y strictement positif peut s'écrire sous la forme a^z où z est un nombre réel. La fonction $z \mapsto a^z$ est la fonction exponentielle de base a.
Si a ($a > 0$ et $a \neq 1$) est le nombre placé à l'ordonnée 1 (cm ou dm…), le nombre y placé à l'ordonnée z est $y = a^z$.
Chaque nombre réel strictement positif y correspond à un nombre réel z unique tel que $y = a^z$. Il existe donc une fonction continue qui à chaque nombre réel y associe le nombre z tel que $y = a^z$. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a, et s'appelle la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$.

	$]-\infty ; +\infty[$	$\to$	$]0 ; +\infty[$
exponentiel de base a	z	$\mapsto$	$y = a^z$
logarithme de base a	$z = \log_a(y)$	$\leftarrow\!\!\!\mid$	y

Si la suite géométrique commence à 1 et sa raison est 10, et que la distance entre 1 et 10 est 1 dm, alors l'ordonnée de chaque nombre est donnée par la fonction logarithme décimal, notée log, en dm. L'axe des abscisses est gradué selon une suite arithmétique. Dans ce type de graphique, si les points sont alignés, alors le phénomène est exponentiel. Il est alors possible d'estimer toute valeur intermédiaire.
Pour retrouver l'image y de x, d'après son ordonnée z en dm, il suffit de calculer $y = 10^z$.
Schématiquement :

Date (en années)		Population (en millions)		Ordonnée (en dm)
x	$\mapsto$	y	$\mapsto$	$z = \log(y)$
		$y = 10^z$	$\leftarrow\!\!\!\mid$	z

Si on connaît une relation entre x et z, par exemple $z = a\,x + b$, on peut en déduire une relation du type $\boldsymbol{y = 10^{a\,x+b}}$ ou $y = 10^{a\,x} \times 10^{\,b} = C \times 10^{a\,x}$ qui pourrait aussi s'écrire $y = k \times 2^{d\,x}$ ou plus généralement $y = k \times Q^{d\,x}$.

Si la suite géométrique démarre à 1 et a pour raison 2 avec une distance de 1 cm entre 1 et 2, l'ordonnée (en cm) est le logarithme en base 2 de y, noté $\log_2(y)$.
Et si la raison est a ($a > 0$), l'ordonnée (en cm) est le logarithme en base a de y, noté $\log_a(y)$.
Ainsi la fonction logarithme décimal peut aussi être notée : $\log_{10}$.

Remarque : Les phénomènes exponentiels peuvent être croissants ou décroissants. Par exemple, lorsque le nombre de noyaux radioactifs est divisé par 2, ce qui correspond à une diminution de 50 % à chaque période, le nombre de noyaux radioactifs est décroissant.
Les propriétés des fonctions logarithmes seront étudiées au chapitre suivant et les méthodes seront alors reprécisées à la fin du chapitre.