

Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA

(Programme International d'Évaluation des Acquis des Élèves de l'OCDE)

Antoine Bodin

Responsable de l'Observatoire EVAPM

Équipe de Recherche APMEP (associée à l'INRP)

Depuis sa création en 1986, EVAPM utilise divers critères de classification pour ses questions d'évaluation. En particulier, les bases EVAPMIB et EVAPM- TEX utilisent des classifications multicritères.

La première classification utilisée a été celle de Régis Gras, composée en fait d'une typologie d'activités et d'une taxonomie de la complexité cognitive.

Récemment, nous avons substitué à la taxonomie originale de R.Gras une taxonomie révisée prenant en considération les quelque 20 ans d'expérience d'EVAPM. Les classements effectués antérieurement ne sont que rarement modifiés lorsqu'on utilise cette taxonomie, mais cette dernière s'avère d'emploi plus commode. En particulier elle est mieux adaptée pour une utilisation à tous les niveaux (enseignement scolaire et au delà).

De son côté, le programme PISA a développé un cadre de référence pour l'analyse des compétences mathématiques et la classification des questions d'évaluation.

Bien que PISA cherche à évaluer les compétences mathématiques nécessaires à tous et non les compétences plus spécialisées, son cadre de référence nous a semblé assez riche pour être utilisable pour des évaluations plus ouvertes, telles que celles qui sont développées par EVAPM.

Maintenant, dans le cadre d'EVAPM, nous utilisons aussi les critères PISA pour la classification de nos questions.

Il y a à cela plusieurs raisons :

- Le cadre de référence de PISA est utilisé pour l'évaluation dans plus de 50 pays et, de ce fait, nos bases de questions sont plus facilement utilisables au niveau international.
- Ce cadre est davantage centré sur les champs de problèmes et sur les processus mis en œuvre dans le traitement des situations que sur les contenus. De ce fait il complète bien nos autres critères de classement.
- EVAPMIB rassemble les questions d'EVAPM, mais aussi d'autres questions utilisées dans des études à grande échelle (DEP, TIMSS, PISA...). Nous venons d'ailleurs d'obtenir les autorisations de l'IEA et de l'OCDE pour intégrer à EVAPMIB l'ensemble des questions des études internationales depuis 1960 (à la seule exception des quelques questions qui sont réservées pour les études futures). Cette ouverture internationale d'EVAPMIB rendait souhaitable l'utilisation conjointe du cadre de référence de PISA.

Ajoutons qu'il nous a semblé utile de présenter ce cadre sous une forme accessible aux enseignants. Le programme PISA évalue au moins un aspect de l'efficacité des systèmes d'enseignement et il nous semble normal que les enseignants sachent à quelle aune leur travail est finalement jugé (au moins partiellement).

Les textes qui suivent sont pour la plupart empruntés aux documents de l'OCDE (cf. références). Toutefois leur présentation constitue une adaptation libre. De plus, la traduction française des documents originaux nous paraissant souvent fautive, nous avons souvent utilisé le texte anglais.

Les figures sont aussi extraites des documents de l'OCDE, sauf la figure liant les domaines, les

classes et les échelles de compétence.

Bien sûr ces adaptations et modifications sont faites sous notre seule responsabilité et en cas de doute, il convient de se reporter aux documents d'origine.

Précisons que bien que le cadre de référence dans son ensemble ait été amendé et approuvé par l'ensemble des représentants des pays participant à l'étude, l'essentiel du travail a été fait par un groupe d'experts indépendants présidé par Jan de Lange (Freudenthal Institute - Utrecht).

Nous remercions ici les responsables de l'OCDE, les membres du groupe d'experts (MEG) et Ray Adams et son équipe de ACER (Melbourne) qui nous ont encouragés dans ce travail et nous ont apporté toute l'assistance nécessaire.

Le cadre de référence des études PISA¹

La définition PISA de la culture mathématique et son contexte²

La définition de la culture mathématique retenue par le programme OCDE/PISA est la suivante :

La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, à produire des jugements fondés impliquant les mathématiques³, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Plusieurs aspects de cette définition ont un sens particulier dans le contexte PISA. Tout comme pour la compréhension de l'écrit, la définition de ce domaine met l'accent sur des applications très diverses dans la vie des personnes, bien plus que sur la simple exécution d'opérations mécaniques. En conséquence, le terme de « culture » est utilisé pour désigner la capacité d'utiliser des connaissances et des savoir-faire mathématiques de manière fonctionnelle, plutôt qu'une maîtrise de type purement scolaire.

L'expression « s'engager dans des activités mathématiques » dans la définition PISA ne désigne pas simplement des activités d'ordre physique ou social (par exemple, calculer le montant à rendre lorsqu'on fait la monnaie à quelqu'un dans un magasin), mais inclut également des utilisations plus larges, y compris le fait d'évaluer ou de prendre position par rapport à certaines choses (par exemple, se forger une opinion sur le programme de dépenses du gouvernement).

La culture mathématique implique également la capacité de poser et de résoudre des problèmes mathématiques dans des contextes très divers, ainsi que la motivation à le faire, qui dépend souvent de traits de la personnalité comme la confiance en soi et la curiosité.

Les trois dimensions de la culture mathématique

Pour passer de cette définition à une évaluation de la culture mathématique, trois grandes

¹ Textes partiellement empruntés aux documents et rapports de l'OCDE (PISA 2000 et PISA 2003). Les traductions françaises officielles paraissant peu satisfaisantes, je les ai modifiées sur un certain nombre de points.

² Le mot anglais « literacy » a été malencontreusement traduit en français par « culture », ce qui est source de profonds malentendus.

³ La traduction française officielle (qui est due à l'OCDE, et non au MEN) comporte un contre-sens manifeste (mauvais début !) : il y est dit que, s'agissant des mathématiques, l'élève doit pouvoir « porter des jugements fondés à leur propos », alors que dans la définition officielle en anglais, il s'agit de pouvoir, d'une façon générale, porter des jugements fondés (ce qui suppose la capacité à justifier ses jugements) (*well-founded judgements*). Comme il n'est pas acceptable de penser que les mathématiques soient le seul domaine à partir duquel il soit possible d'émettre des jugements fondés, il est clair qu'il faut comprendre que les jugements fondés en question le sont, ici, dans le cas où les mathématiques peuvent être impliquées ou peuvent être utilisées (ce que j'ai essayé de rendre explicite dans la traduction proposée).

dimensions ont été définies, à savoir :

Les contenus (les idées majeures)

Plutôt que de s'attacher au découpage traditionnel (et scolaire) des contenus, le cadre de référence de PISA met l'accent sur des grandes idées mathématiques : variation et croissance, espace et forme, quantité, incertitude.

Les processus et les compétences

Le programme OCDE/PISA étudie les capacités des élèves à analyser des idées mathématiques, à raisonner à leur propos, et à les communiquer à autrui, au moment où ils posent, formulent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques relevant de diverses situations. Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent exploiter les savoir-faire et les compétences qu'ils ont acquis tout au long de leur scolarité et de leurs expériences de vie.

OCDE/PISA désigne par le terme de « mathématisation » le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes concrets⁴.

Les contextes

Un aspect important de la culture mathématique est de pouvoir utiliser les mathématiques dans des situations très diverses : vie personnelle, vie scolaire, activités sportives ou professionnelles, participation à la vie de la collectivité locale ou de la société en général.

Les contenus

Les curriculums de mathématiques sont habituellement organisés en chapitres, ou domaines enseignés. Ces divisions ont pour effet de compartimenter les mathématiques, et d'accorder une importance exagérée aux techniques de calcul et aux formules. Au début du XXe siècle, on pouvait raisonnablement envisager les mathématiques comme un ensemble formé d'une douzaine de matières distinctes (arithmétique, géométrie, algèbre, calcul, etc.). De nos jours, le nombre de matières à évoquer serait plutôt de soixante à soixante-dix. Certains domaines, comme l'algèbre ou la topologie, ont été scindés en divers sous-domaines. D'autres, comme la théorie de la complexité ou la théorie des systèmes dynamiques, sont des sujets d'étude entièrement neufs. Pour être pertinentes, les mathématiques doivent être à l'image des structures complexes du monde qui nous entoure.

Pour ces raisons et d'autres encore, PISA a préféré adopter une approche différente et a structuré les contenus de l'évaluation autour de thèmes mathématiques transversaux, appelés ici des « idées mathématiques majeures »⁵. Dans le cadre de PISA, l'on a sélectionné une série d'idées majeures susceptibles d'offrir suffisamment de diversité et de profondeur pour faire apparaître l'essentiel des mathématiques, tout en maintenant le lien avec les domaines enseignés traditionnels. On a retenu la liste suivante d'idées mathématiques majeures, qui satisfont ces critères : quantité, espace et formes, variation et croissance, variations et relations, incertitude.

Quantité

Ce thème met l'accent sur la nécessité d'opérer des quantifications pour organiser le monde. Il couvre divers aspects importants, en particulier : appréhender des grandeurs relatives, reconnaître des régularités numériques, utiliser des nombres pour représenter les quantités et les attributs quantifiables des objets du monde réel (comptage et mesures). Font également partie

⁴ « real life problems » a été officiellement traduit par « problèmes de la vie courante ». ; cependant, la vie « réelle » ne se limite pas à la vie courante telle qu'elle est souvent comprise.

⁵ « *Overarching ideas* ». *Le découpage de PISA est dérivée des recommandations de la Société Mathématiques Américaine - AMS (cf. « On the shoulders of the Giants » qui décrit les grandes idées « overarching ideas » reprises par PISA). Il s'agit d'une organisation du type que nous appelons, en France, d'appeler « par problématiques » (cf R. Gras et APMEP).*

de ce thème le traitement et la compréhension des nombres, sous les différentes formes qu'ils peuvent prendre lorsque nous les rencontrons.

Le raisonnement quantitatif est un autre aspect important lorsqu'on est confronté à la *quantité*. Parmi les composantes essentielles du raisonnement quantitatif, on peut citer : avoir le sens des nombres, pouvoir représenter des nombres sous diverses formes, comprendre la signification des opérations, « sentir » l'ordre de grandeur des nombres ou ce qu'est un calcul mathématiquement élégant, pouvoir effectuer des calculs mentaux et des estimations.

Espace et formes

Les régularités de structure⁶ sont omniprésentes autour de nous : dans le langage, la musique, les images vidéo, la circulation, les constructions d'immeubles, l'art. Les formes peuvent être considérées comme des structures : maisons, immeubles de bureaux, ponts, étoiles de mer, flocons de neige, plans de ville, feuilles de trèfle, cristaux, ombres. Les structures géométriques peuvent servir de modèles relativement simples pour quantité de phénomènes, et leur étude est possible et souhaitable à tous les niveaux (Grünbaum, 1985).

Lorsque nous étudions des formes et des constructions, nous nous intéressons à leurs similitudes et à leurs différences en analysant leurs composantes formelles et en nous efforçant de reconnaître des formes sous des représentations et dans des dimensions différentes. L'étude des formes est étroitement liée à « l'appréhension de l'espace », c'est-à-dire au fait d'apprendre à connaître, à explorer et à conquérir l'espace afin de mieux comprendre comment nous y vivons, nous y respirons et nous nous y déplaçons (Freudenthal, 1973).

Nous devons pour cela être capables de comprendre les propriétés des objets et leurs positions relatives. Nous devons être conscients de la manière dont nous voyons les choses et savoir pourquoi nous les percevons de cette manière. Nous devons apprendre à nous orienter dans l'espace, au sein de constructions et de formes. Cela implique que nous comprenions la relation entre une forme et son image, ou sa représentation visuelle – par exemple, entre une ville réelle et les photographies ou le plan qui la représente. Il nous faut aussi comprendre comment des objets en trois dimensions peuvent être représentés en deux dimensions, comment les ombres se forment et s'interprètent, ce qu'est la perspective et comment elle fonctionne.

Variations et relations

Tout phénomène naturel est la manifestation de variations, et le monde autour de nous nous permet d'observer quantité de relations provisoires ou permanentes entre phénomènes. À titre d'exemple, citons les organismes qui changent en grandissant, le cycle des saisons, le flux et le reflux des marées, les fluctuations des taux de chômage, les changements météorologiques et l'évolution des indices boursiers. Certains de ces processus de variation peuvent être décrits ou modélisés par des fonctions mathématiques simples : fonctions linéaires et affines, exponentielles, périodiques, logistiques, qu'elles soient discrètes ou continues. Mais de nombreux processus relèvent de catégories différentes, et l'analyse des données est souvent essentielle pour identifier le type de relation.

Les relations mathématiques se présentent souvent sous la forme d'équations ou d'inéquations, mais des relations d'une nature plus générale (l'équivalence, la divisibilité et l'inclusion, pour n'en citer que quelques-unes) sont également susceptibles d'apparaître.

Le raisonnement fonctionnel, c'est-à-dire le fait de raisonner en termes de relations et à propos de relations, est l'un des objectifs les plus fondamentaux de l'enseignement des mathématiques (MAA, 1923⁷). Les relations peuvent se présenter sous une multitude de formes différentes, notamment sous forme symbolique, algébrique, graphique, géométrique, ou sous forme de

⁶ Traduction de « pattern »

⁷ MAA : Mathematical Association of America

tableau. Les divers modes de représentation peuvent servir des objectifs différents et avoir des propriétés spécifiques. C'est ce qui explique pourquoi la traduction d'une représentation à une autre a souvent une importance critique dans la situation ou la tâche que nous devons affronter.

Incertitude

La « société de l'information » actuelle nous offre des informations en abondance.

Ces informations sont souvent présentées comme précises, scientifiques et dotées d'un certain degré de certitude. Pourtant, dans la vie quotidienne, nous sommes confrontés à des résultats d'élection incertains, des ponts qui s'effondrent, des krachs boursiers, des prévisions météorologiques peu fiables, des prédictions erronées en matière de croissance démographique, des modèles économiques qui fonctionnent mal et bien d'autres manifestations de l'incertitude de notre monde.

Par incertitude, nous entendons faire référence à deux aspects liés entre eux, les données et le hasard, deux sujets d'études mathématiques qui appartiennent respectivement aux statistiques et aux probabilités. Des recommandations récentes suggèrent de faire une plus large place aux statistiques et aux probabilités dans les programmes scolaires.⁸

La collecte, l'analyse et la visualisation/représentation des données, les probabilités et les inférences sont des activités et des concepts mathématiques importants de ce domaine.

Processus et compétences

Les domaines de compétences

Pour réussir le processus de mathématisation dans un grand nombre de situations différentes, impliquant divers contextes extramathématiques et intra-mathématiques et diverses idées majeures, l'individu a besoin de disposer d'un certain nombre de compétences mathématiques spécifiques (susceptibles de s'actualiser dans des processus de résolution de situations) qui, réunies, peuvent être considérées comme constituant une compétence mathématique étendue. Pour chacune de ces compétences, l'individu peut avoir atteint divers niveaux de maîtrise. Les multiples aspects de la mathématisation font appel à ces compétences à des degrés divers, tant en ce qui concerne la nature spécifique des compétences requises qu'en ce qui concerne le niveau de maîtrise nécessaire. Pour identifier et examiner ces compétences, le programme OCDE/PISA a décidé d'utiliser une classification en huit catégories⁹.

Voici cette liste des compétences générales qui seront développées à différents niveaux dans les classes de compétences décrites plus loin. Pour une description complète, se référer au cadre de référence complet de PISA (cf. références).

1. Pensée et raisonnement mathématique

Savoir poser des questions à caractère mathématique, comme : « Y a-t-il...? », « Si oui, combien ...? », « Comment puis-je trouver...? ». Connaître le genre de réponses que les mathématiques donnent à de telles questions. Faire la distinction entre différentes sortes d'énoncés (définitions, théorèmes, conjectures, hypothèses, exemples, assertions conditionnelles). Comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés, et pouvoir en tenir compte.

2. Argumentation mathématique

Savoir ce que sont les preuves mathématiques et en quoi elles diffèrent des autres types de

⁸ (MSEB 1990, NCTM 1989, Commission d'enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école, [Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools], 1982, LOGSE 1990, NCTM 2000)

⁹ Classification qui s'appuie sur les travaux de M. Niss (1999) et de ses collègues danois. Des formulations voisines peuvent être trouvées dans les travaux de beaucoup d'autres spécialistes (v. Neubrand et al, 2000)

raisonnements mathématiques. Suivre et évaluer des enchaînements d'arguments mathématiques de divers types. Posséder un sens heuristique (« Qu'est-ce qui peut – ou ne peut pas – se passer, et pourquoi ? ») ; et savoir développer et exprimer des arguments mathématiques.

3. Communication mathématique

Savoir s'exprimer de diverses manières sur des sujets à contenu mathématique, aussi bien oralement que par écrit, et comprendre les énoncés écrits ou oraux produits par d'autres sur de tels sujets.

4. Modélisation

Savoir structurer le champ ou la situation à modéliser. Traduire la « réalité » en structures mathématiques, interpréter des modèles mathématiques en termes de « réalité », travailler en se fondant sur un modèle mathématique, valider le modèle, réfléchir, analyser et proposer une critique du modèle et de ses résultats, pouvoir communiquer avec autrui à propos du modèle et de ses résultats (y compris les limites de ces résultats), gérer et contrôler le processus de modélisation.

5. Création et résolution de problèmes

Savoir poser, formuler et définir différentes sortes de problèmes mathématiques (par exemple des problèmes de type « pur », « appliqué », « ouvert » ou « fermé ») et résoudre différentes sortes de problèmes mathématiques de différentes façons.

6. Représentation

Savoir décoder et encoder, transposer, interpréter et distinguer les différentes formes de représentations d'objets et de situations mathématiques ainsi que les relations entre ces diverses représentations ; savoir choisir entre différentes formes de représentations et passer des unes aux autres en fonction de la situation et du but recherché.

7. Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique

Savoir décoder et interpréter le langage symbolique et formel, et comprendre sa relation avec le langage naturel. Traduire le langage naturel en langage symbolique et formel. Savoir se servir d'énoncés et d'expressions contenant des symboles et des formules. Utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs

7. Utilisation d'instruments et d'outils

Connaître et être capable d'utiliser divers instruments et outils (y compris les outils informatiques) qui peuvent être utiles à l'activité mathématique, et connaître leurs limites

Le programme OCDE/PISA ne cherche pas développer des items qui évaluent une par une les compétences ci-dessus. En fait, celles-ci se chevauchent considérablement, et lorsqu'on utilise les mathématiques, il est généralement nécessaire de se servir de plusieurs compétences à la fois. Par conséquent, vouloir évaluer des compétences isolées risque de produire des tâches artificielles et une parcellisation inutile du domaine de la culture mathématique. Les compétences particulières que les élèves seront à même de mettre en oeuvre ont toutes chances de varier considérablement selon les individus. Ceci est en partie dû au fait que tout apprentissage résulte d'une série d'expériences « où la construction du savoir individuel prend place tout au long d'un processus d'interaction, de négociation et de collaboration »¹⁰. Dans l'évaluation OCDE/PISA, on présuppose qu'une grande partie des connaissances mathématiques des élèves provient des apprentissages scolaires. La compréhension d'un domaine s'acquiert graduellement. Des représentations et des raisonnements de nature plus formelle et plus abstraite émergent au cours du temps et sont la

¹⁰ De Corte, Greer & Verschaffel, 1996, p. 510

conséquence d'un engagement effectif des élèves dans des activités conçues pour faire évoluer des idées qui étaient au départ informelles.

La culture mathématique s'acquiert aussi au travers d'expériences faisant intervenir des interactions dans toutes sortes de situations sociales et de contextes divers

Pour faciliter la description et la présentation des capacités des élèves, ainsi que de leurs points forts et faibles dans une perspective internationale, une certaine structure est nécessaire. Une solution à la fois simple et pratique consiste à décrire des classes déterminées de compétences en fonction des types de démarches cognitives nécessaires pour résoudre différents problèmes mathématiques

Les classes de compétences ¹¹⁻¹²

Les compétences rapidement présentées ci-dessus ont été détaillées et regroupées pour former trois classes de compétences hiérarchisées : la classe « reproduction », la classe « connexion » et la classe « réflexion ».

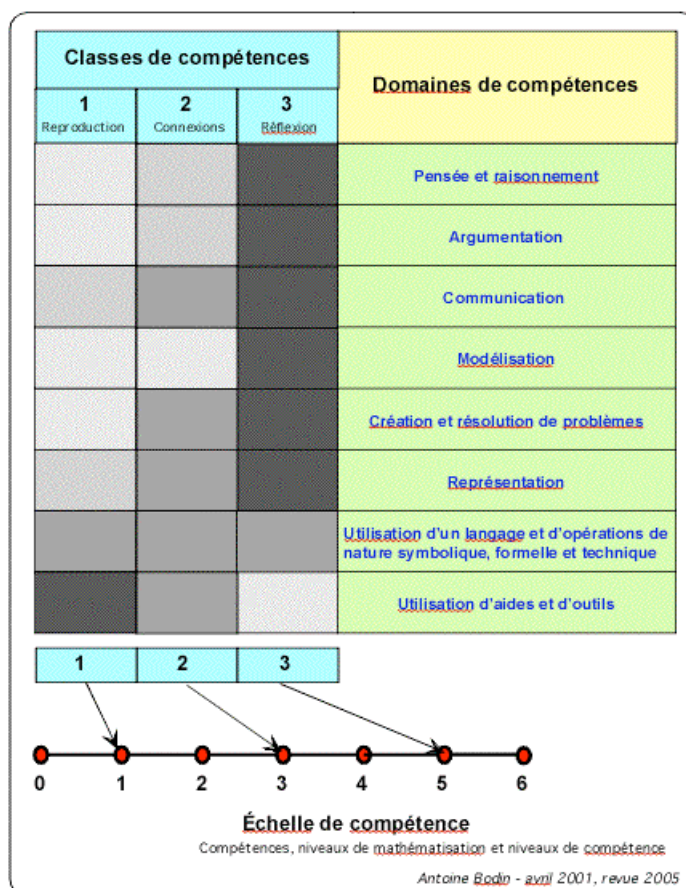
La classe reproduction.

Les compétences classées dans ce groupe impliquent essentiellement la reproduction de connaissances déjà bien exercées – en particulier, celles qui sont les plus communément sollicitées dans les tests d'évaluation normalisés et les évaluations périodiques en classe : connaissance de faits, représentations de problèmes courants, identification d'équivalences, mémorisation de propriétés et d'objets mathématiques familiers, exécution de procédures routinières, application d'algorithmes et de savoir-faire techniques usuels, utilisation d'énoncés contenant des symboles et des formules standard, et réalisation de calculs.

Les items utilisés pour évaluer les compétences du groupe reproduction peuvent être décrits au moyen de deux expressions clé : la reproduction d'acquis et l'exécution d'opérations de routine

La classe connexions

Les compétences du groupe connexions sont dans le prolongement de celles du groupe reproduction, dans la mesure où elles servent à résoudre des problèmes qui ne sont plus de simples routines, mais qui continuent à impliquer un cadre familier ou quasi-familier



¹¹ Pour EVAPM j'utilise aussi la classification d'Aline Robert (Voir article dans « petit x » n° 60 - 2002), qui est d'inspiration différente, mais qui, à l'utilisation donne à peu près le même classement que celle de PISA (la classification de pisa, plus axée « concrete maths » a l'avantage d'être davantage diffusée connue... dans le Monde.

¹² On notera que pour EVAPM nous utilisons une classification des compétences empruntée aux travaux d'Aline Robert. Bien que d'inspiration théorique différente de celle de PISA, la classification d'Aline Robert conduit le plus souvent à classer les questions aux mêmes niveaux (1, 2, ou 3). Voir références et sur le site de l'APMEP (entrée Observatoire EVAPM).

Le groupe réflexion

Les activités cognitives associées à ce groupe demandent aux élèves de faire preuve d'une démarche mentale réfléchie lors du choix et de l'utilisation de processus pour résoudre un problème. Elles sont en rapport avec les capacités auxquelles les élèves font appel pour planifier des stratégies de solution et les appliquer dans des situations-problème qui contiennent plus d'éléments que celles du groupe connexions, et qui sont plus « originales » (ou peu familières).

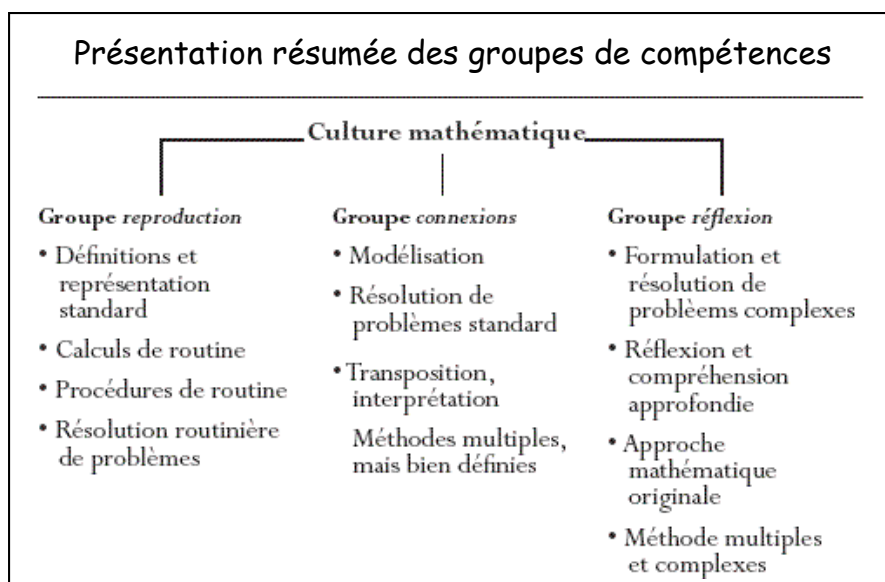
Domaines, classes, échelles

La figure ci-dessus montre la façon dont le cadre de référence de PISA est organisé. On y voit le croisement d'une organisation verticale (les domaines de compétences¹³) et d'une organisation horizontale en niveaux de compétence. On verra plus loin comment cette organisation s'articule avec la construction d'échelles de niveau de « culture mathématique ».

On trouvera en annexe, la répartition des niveaux de compétences dans les classes de compétentes.

Classement des questions

Il est possible de se servir des descriptions des compétences figurant aux pages qui précèdent pour classer des items de mathématiques et assigner chacun d'eux à l'une des classes de compétences. On peut y arriver en analysant la tâche générée par l'item, puis ; pour chacune des huit classes de processus, on procède ensuite à une évaluation pour établir lequel des trois groupes décrit le mieux les demandes de cet item particulier en relation avec telle compétence spécifique.



Dans le cas où une ou plusieurs des compétences requises correspondent à la description du groupe réflexion, l'item est classé dans le groupe de compétences réflexion. Si ce n'est pas le cas, mais qu'une ou plusieurs des compétences requises correspondent à la description du groupe connexions, l'item est classé dans le groupe de compétences connexions. Dans tous les autres cas, l'item sera assigné au groupe reproduction, puisque toutes les compétences qu'il met en jeu correspondent à la description des compétences de ce groupe.

Les contextes

Il s'agit des contextes d'où sont issus les questions de l'évaluation.

Les échelles de culture mathématique

D'une façon originale, PISA a construit une échelle générale de culture mathématique et des

¹³ Analogue aux classes d'activités de la taxonomie de Régis Gras.

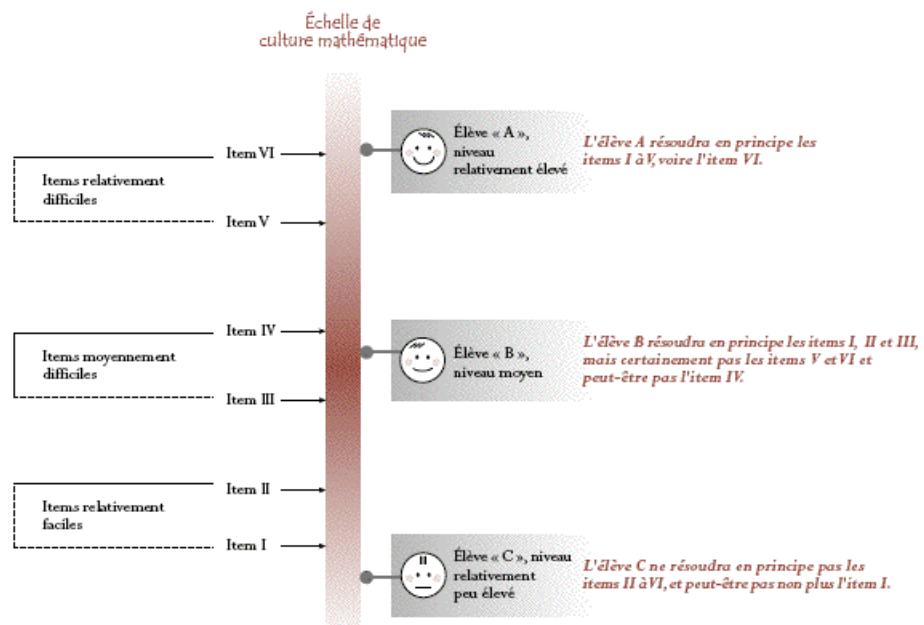
échelles particulières relatives à chacun des sous-domaines de l'étude.

Ces échelles comportent 6 niveaux numérotés de 1 (compétence a priori minimale) à 6 (compétence maximale).

La méthodologie de construction des échelles est complexe. Elle inclut une analyse a priori du domaine et des validations croisées impliquant les représentants des pays participants aussi bien que les équipes techniques chargées de la construction des questions d'évaluation. Elle inclut ensuite une reconstruction et une validation utilisant les résultats de l'étude. Cette partie utilise les techniques modernes d'analyse des réponses aux items (basées sur le calcul des probabilités) conduisant par des méthodes itératives à accepter ou à rejeter des items à un niveau donné.

En fin de compte, les items et les élèves se trouvent placés sur la même échelle.

On trouvera une présentation détaillée de la méthode dans le rapport technique de l'étude 2003.



Description succincte des six niveaux de culture mathématique¹⁴

Niveau	Ce que les élèves sont typiquement capables de faire selon les niveaux
6	<p>Au niveau 6, les élèves sont capables de conceptualiser, de généraliser et d'utiliser des informations sur la base de leurs propres investigations et modélisation, dans des situations de problèmes complexes. Ils peuvent mettre en relation différentes représentations et sources d'information et passer de l'une à l'autre avec agilité. Ils peuvent se livrer à des raisonnements et à des réflexions mathématiques de niveau avancé¹⁵.</p> <p>Ayant une bonne maîtrise des relations symboliques et des opérations mathématiques classiques, ces élèves sont capables d'utiliser leur intuition et leur compréhension pour développer de nouvelles approches et de nouvelles stratégies dans des situations nouvelles.</p> <p>Ils peuvent décrire et communiquer avec précision leurs actions et leurs réflexions relativement à leurs résultats, leurs interprétations et leurs arguments, ainsi que l'adéquation de ces actions et de ces réflexions aux situations initiales.¹⁶</p>
5	<p>Au niveau 5, les élèves peuvent élaborer et utiliser des modèles adaptés à des situations complexes ; situations dont ils peuvent identifier les contraintes et préciser des hypothèses et autres conditions.</p> <p>Ils sont capables de choisir, de comparer et d'évaluer des stratégies de résolution permettant de s'attaquer à des problèmes complexes liés à ces modèles. Ils peuvent utiliser des stratégies utilisant des modes de pensée et de raisonnement variés et bien développés, des représentations adaptées, des caractérisations symboliques et formelles, ainsi que des idées diverses¹⁷ en rapport avec la situation.</p> <p>Ils peuvent réfléchir à leurs actions et formuler et communiquer leurs interprétations et leur raisonnement.</p>
4	<p>Au niveau 4, les élèves sont capables d'utiliser de façon efficace des modèles explicites pour traiter des situations concrètes complexes qui peuvent comporter de contraintes ou qui supposent d'émettre des hypothèses.</p> <p>Ils peuvent choisir et intégrer différentes représentations, dont des représentations symboliques, et les relier directement à certains aspects de situations tirées du monde réel. Dans ces situations, ils peuvent mettre en oeuvre des savoir-faire bien développés et raisonner avec souplesse, utilisant leur intuition et leur compréhension de la situation¹⁸.</p> <p>Ils peuvent construire des explications et des arguments sur la base de leurs interprétations et de leurs actions et les communiquer.</p>
3	<p>Au niveau 3, les élèves peuvent exécuter des procédures décrites de façon claire, y compris celles qui demandent des décisions séquentielles. Ils peuvent choisir et mettre en oeuvre des stratégies simples de résolution de problèmes. Ils peuvent interpréter et utiliser des représentations basées sur différentes sources d'information et construire leur raisonnement directement sur cette base. Ils peuvent rendre compte succinctement de leurs interprétations, de leurs résultats et de leur raisonnement.</p>
2	<p>Au niveau 2, les élèves peuvent interpréter et reconnaître des situations dans des contextes qui ne demandent pas plus que d'effectuer des inférences directes. Ils n'ont à puiser les informations pertinentes que dans une source d'information unique et peuvent se limiter à un seul mode de représentation. Ils sont capables d'utiliser les algorithmes de base, des formules, des procédures ou des conventions élémentaires. Ils peuvent se livrer à un raisonnement direct et interpréter les résultats de manière littérale.</p>
1	<p>Au niveau 1, les élèves peuvent répondre à des questions explicites s'inscrivant dans des contextes familiers, dont la résolution ne demande pas d'autres informations que celles qui sont fournies. Ils sont capables d'identifier les informations et d'appliquer des procédures de routine sur la base de consignes directes dans des situations explicites. Ils peuvent exécuter des actions qui vont de soi et qui découlent directement des stimulus donnés.</p>

En fait le niveau 6 pourrait être simplement défini par : « tout ce qui est au dessus du niveau 5 ».

De même, les rapports utilisent un niveau 0 : « tout ce qui est au dessous du niveau 1 ».

Ces niveaux de culture mathématiques sont par ailleurs précisés pour chacune des idées majeures. On

¹⁴ Traduit de l'anglais (original PISA) par A. Bodin

¹⁵ référence à « advanced math levels »

¹⁶ Référence aux processus métacognitifs

¹⁷ traduction approximative de « insight » qui porte en particulier l'idée d'intuition (mais pas seulement)

¹⁸ idem note précédente

trouvera cette dérivation en annexe.

Le tableau ci-dessous donne une idée de la répartition des jeunes de 15 ans de l'ensemble des pays de l'OCDE par rapport aux niveaux ainsi définis.

Niveau	Inférieur à 1	1	2	3	4	5	6
Pourcentage des jeunes de 15 ans de l'OCDE qui sont à ce niveau	10%	15%	20%	20%	20%	10%	5%

Précisons qu'il s'agit d'approximations à 1 ou 2% près, bien suffisantes ici.

Des données plus précises s'imposent évidemment si l'on souhaite comparer les pays ou les systèmes éducatif. On trouvera toutes les données nécessaires dans le rapport officiel de PISA.

Pour chacun des sous-domaines de l'étude, les taux correspondants restent proches de ceux donnés ci-dessus.

Voici encore, pour information, les taux officiels pour la France.

Niveau	Inférieur à 1	1	2	3	4	5	6
Pourcentage des jeunes de 15 ans qui, en France, sont à ce niveau	5,6%	11%	20,2%	25,9%	22,1%	11,6%	3,5%

Références

Bodin, A.. (2005) : Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. Communication faite à la conférences Franco Finlandaise sur PISA. Aussi en anglais : "What does PISA really assess? What it doesn't? A French view." Sites Web de la SMF et de l'APMEP

Bodin, A.. (2005) : Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA ... en passant par les études de la DEP et d'EVAPM. Communication séminaire de l'EHESS (à paraître).

Dupé, C. & Olivier, Y. (2005) : Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre. Bulletin de l'APMEP N°460 - octobre 2005

OCDE 2004, Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003

OCDE 2004, First results from PISA 2003. Executive summary.

OCDE 2004, PISA 2003 Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes.

OECD 2005, PISA 2003 technical report (disponible en anglais seulement).

Robert A : 2003, Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège. Petit x N°62

Noter que la classification des "grandes idées" ou problématiques a été partiellement emprunté à :

Steen, L. A (ed) : (1990), On the shoulders of the giants - new approaches to numeracy. National Academic Press (Washington)

Adresses et contacts

Observatoire EVAPM et site de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr/>

Note officielle française sur PISA: <http://www.educ-eval.education.fr/pisa2003.htm>

Cadre de référence et rapports internationaux : <http://www.pisa.oecd.org/>

Sur le site de l'APMEP, article, diaporamas et présentation des questions libérées avec des résultats (en français et en anglais)

http://www.apmep.asso.fr/rubrique.php3?id_rubrique=114

Niveaux de référence pour l'enseignement des mathématiques en Europe :

http://www-irem.univ-fcomte.fr/Presentation_ref_levels.HTM and

<http://www.emis.de/projects/Ref/>

Antoine Bodin : bodin.antoine@nerim.fr

Annexe 1 : Répartition des éléments de compétences dans les domaines de compétences et dans les groupes de compétences

	Groupe reproduction	Groupe connexions	Groupe réflexion
1. Pensée et raisonnement.	Savoir poser des questions mathématiques du type le plus élémentaire (« Combien y a-t-il de...? », « Quelle quantité y a-t-il de...? ») et comprendre les types de réponses qui s'y rapportent (« Il y a autant de... », « Il y a telle quantité de... ») ; savoir distinguer entre une définition et une affirmation ; pouvoir comprendre et manier des notions mathématiques dans le même contexte que celui où elles ont été rencontrées au départ ou ont été exercées par la suite.	Savoir poser des questions du type « Comment peut-on trouver...? », « Quel est le traitement mathématique qui...? » et comprendre les types de réponses qui y correspondent (fournies au moyen de tableaux, graphiques, solutions algébriques, schémas, etc.) ; savoir distinguer entre définitions et affirmations, ainsi qu'entre des types différents d'affirmations ; pouvoir comprendre et manier des notions mathématiques dans des contextes qui diffèrent légèrement de celui où elles ont été rencontrées au départ ou ont été exercées par la suite.	Savoir poser des questions du type « Comment peut-on trouver...? », « Quel est le traitement mathématique qui...? », « Quels sont les aspects essentiels du problème ou de la situation ? » et comprendre es types de réponses qui y correspondent (fournies au moyen de tableaux, graphiques, solutions algébriques, schémas, spécification des points clé, etc.) ; savoir distinguer entre définitions, théorèmes, conjectures, hypothèses et affirmations portant sur des cas particuliers, et pouvoir réfléchir sur ces distinctions ou les structurer de manière active ; pouvoir comprendre et manier des notions mathématiques dans des contextes qui sont nouveaux ou complexes ; pouvoir comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés et en tenir compte lors de la généralisation des résultats.
2. Argumentation.	Pouvoir suivre et justifier des processus quantitatifs standard (notamment des procédures, des énoncés et des résultats de calculs).	Pouvoir effectuer des raisonnements mathématiques simples, sans distinction entre preuves et formes plus générales d'argumentation ou de raisonnement ; pouvoir suivre et évaluer des enchaînements d'arguments mathématiques de divers types ; avoir un certain sens heuristique (par ex. se demander « ce qui peut se passer ou non, et pourquoi ? » ou « Que savons-nous, et que voulons-nous obtenir ? »).	Pouvoir effectuer des raisonnements mathématiques simples, en faisant la distinction entre démonstrations, preuves et formes plus générales d'argumentation ou de raisonnement ; pouvoir suivre, évaluer et construire des enchaînements d'arguments mathématiques de divers types ; pouvoir utiliser une démarche heuristique (par ex. se demander « ce qui peut se passer ou non, et pourquoi ? » ou « Que savons-nous, et que voulons-nous obtenir ? », « Lesquelles de ces propriétés sont essentielles ? », « Quelle est la relation entre ces objets ? »).

3. Communication.	Pouvoir comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des énoncés mathématiques simples (par exemple pour restituer le nom et les propriétés principales d'objets mathématiques familiers, présenter des calculs et leurs résultats), en utilisant généralement un seul type de formulation.	Pouvoir comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des énoncés mathématiques allant de la restitution des noms et des principales propriétés d'objets familiers ou de l'explication d'un calcul et de son résultat (généralement de plus d'une manière) jusqu'à l'explication d'aspects qui mettent en jeu des relations. Pouvoir, aussi, comprendre les mêmes types d'énoncés produits par écrit ou oralement par autrui.	Pouvoir comprendre et formuler soi-même, oralement ou par écrit, des énoncés mathématiques allant de la restitution des noms et des principales propriétés d'objets familiers ou de l'explication d'un calcul et de son résultat (généralement de plus d'une manière) jusqu'à l'explication d'aspects qui mettent en jeu des relations complexes, notamment des relations logiques. Pouvoir, aussi, comprendre les mêmes types d'énoncés produits par écrit ou oralement par autrui.
4. Modélisation.	Pouvoir identifier, retrouver, activer ou appliquer des modèles mathématiques familiers et bien structurés; les interpréter en effectuant l'aller-retour nécessaire entre ces modèles (ainsi que leurs résultats) et la « réalité »; pouvoir communiquer de manière élémentaire les résultats du modèle.	Pouvoir structurer le champ ou la situation qu'il y a lieu de modéliser ; transposer la « réalité » en structures mathématiques dans des contextes qui ne sont pas très complexes, mais qui diffèrent néanmoins de ceux qui sont familiers à l'élève. Construire une interprétation en effectuant l'aller-retour nécessaire entre ces modèles (ainsi que leurs résultats) et la « réalité ». Certains aspects de la communication des résultats du modèle sont également à inclure ici.	Pouvoir structurer le champ ou la situation qu'il y a lieu de modéliser ; transposer la « réalité » en structures mathématiques dans des contextes qui peuvent être complexes ou différer sensiblement de ceux qui sont familiers à l'élève. Construire une interprétation en effectuant l'aller-retour nécessaire entre les modèles (ainsi que leurs résultats) et la « réalité ». La communication des résultats du modèle est également à inclure ici : réunir des informations ou des données, gérer le processus de modélisation, valider le modèle qui en résulte. Ajoutons encore la capacité de réfléchir de manière analytique, proposer une critique, s'engager dans des formes de communication complexes sur les modèles et la modélisation.
5. Formulation et résolution de problèmes.	Pouvoir poser et formuler des problèmes en identifiant ou reproduisant des problèmes déjà pratiqués, de nature formelle ou appliquée et de type fermé ; pouvoir résoudre ce type de problèmes en utilisant des démarches et des procédures standard qui ne font généralement appel qu'à un seul type de procédé.	Pouvoir poser et formuler des problèmes d'une manière qui va au-delà de la reproduction de problèmes déjà pratiqués, de nature formelle ou appliquée et de type fermé ; pouvoir résoudre ce type de problèmes en utilisant des démarches et des procédures standard, mais aussi en faisant appel à des processus de résolution de problèmes plus autonomes, où l'on met en relation différents domaines mathématiques ou différents modes de présentation et de communication (schémas, tableaux, graphiques, explications verbales, croquis).	Pouvoir poser et formuler des problèmes d'une manière qui va bien au-delà de la reproduction de problèmes déjà pratiqués, de nature formelle ou appliquée et de type fermé ; pouvoir résoudre ce type de problèmes en utilisant des démarches et des procédures standard, mais aussi en faisant appel à des processus de résolution de problèmes plus autonomes, où l'on met en relation différents domaines mathématiques ou différents modes de présentation et de communication (schémas, tableaux, graphiques, explications verbales, croquis). Pouvoir, en outre, réfléchir sur les stratégies et les solutions à mettre en oeuvre.

6. Représentation.	Pouvoir coder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques bien connus, sous une forme standard qui a déjà été pratiquée. Le passage d'une représentation à une autre n'est requis que quand ce passage fait lui-même partie de la représentation visée.	Pouvoir coder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques connus ou moins connus ; pouvoir choisir entre diverses formes de représentation d'objets et de situations mathématiques, et passer de l'une à l'autre en les distinguant et en les transposant.	Pouvoir coder, décoder et interpréter des représentations d'objets mathématiques connus ou moins connus ; pouvoir choisir entre diverses formes de représentation d'objets et de situations mathématiques, et passer de l'une à l'autre en les distinguant et en les transposant ; pouvoir, en outre, combiner des représentations de manière créative, ou en inventer d'inédites.
7. Utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique.	Pouvoir décoder et interpréter, dans des contextes et des situations bien connus, les expressions symboliques et formelles de base ; pouvoir manier des énoncés et des expressions simples contenant des symboles et des formules ; notamment, pouvoir utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs selon des procédés de routine.	Pouvoir décoder et interpréter, dans des contextes et des situations moins bien connus, les expressions symboliques et formelles de base ; pouvoir manier des énoncés et des expressions contenant des symboles et des formules ; notamment, pouvoir utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs selon des procédés familiers.	Pouvoir décoder et interpréter des expressions symboliques et formelles mises en œuvre dans des contextes et des situations entièrement nouveaux ; pouvoir manier des énoncés et des expressions contenant des symboles et des formules ; notamment, pouvoir utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs. Pouvoir, en outre, traiter des énoncés et des expressions complexes, contenant des symboles ou des termes formels non familiers, et être à même d'effectuer des transpositions entre ce langage et la langue courante.
8. Utilisation de supports et d'outils.	Connaître et être à même d'utiliser des supports et des outils familiers, dans des contextes et selon des procédés semblables à ceux que l'individu a déjà connus au cours de son apprentissage.	Connaître et être à même d'utiliser des supports et des outils familiers, dans des contextes et selon des procédés qui diffèrent de ceux que l'individu a déjà connus au cours de son apprentissage.	Connaître et être à même d'utiliser des supports et des outils familiers ou non familiers, dans des contextes et selon des procédés qui diffèrent sensiblement de ceux que l'individu a déjà connus au cours de son apprentissage. Connaître, en outre, les limites de ces outils.

Annexe 2 : Description succincte des six niveaux de l'échelle selon les sous-domaines de l'étude

Annexe 2-1 : Domaine « Espace et formes »

Niveau	Compétences générales que les élèves doivent avoir	Tâches spécifiques que les élèves peuvent faire
6	Résoudre des problèmes complexes qui comptent de multiples représentations et qui demandent souvent la mise en oeuvre de processus séquentiels de calcul ; identifier et extraire les informations pertinentes et établir des liens entre des informations différentes, mais connexes ; mettre en oeuvre des compétences de raisonnement et de réflexion et s'appuyer sur une compréhension approfondie ; généraliser les résultats, communiquer les solutions, donner des explications et exposer des arguments.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des descriptions textuelles complexes et les relier à d'autres représentations (souvent nombreuses) ; – se livrer à un raisonnement impliquant des proportions dans des situations complexes qui ne leur sont pas familières ; – se baser sur leur compréhension approfondie pour conceptualiser des situations géométriques complexes ou interpréter des représentations complexes et non familières ; – identifier et combiner de multiples fragments d'information pour résoudre des problèmes ; – concevoir une stratégie pour établir des liens entre des contextes géométriques complexes et des procédures mathématiques connues ; – réaliser des séquences complexes de calcul, concernant des volumes par exemple, ou appliquer de manière précise et exhaustive des procédures de routine dans certains contextes ; – donner des explications et exposer des arguments par écrit, sur la base de la réflexion, de la compréhension et de la généralisation.
5	Résoudre des problèmes qui leur demandent de construire des hypothèses appropriées ou de se servir des hypothèses qui leur sont données ; mettre en oeuvre leurs compétences pointues de raisonnement, d'argumentation et de réflexion dans l'espace pour identifier des informations pertinentes et pour interpréter différentes représentations et établir des liens entre elles ; travailler de manière stratégique et appliquer de multiples processus séquentiels.	<ul style="list-style-type: none"> – Mettre en oeuvre des compétences de raisonnement, d'argumentation, de réflexion et de compréhension d'ordre géométrique ou spatial dans des contextes à deux et trois dimensions qui leur sont ou non familiers ; – construire ou utiliser des hypothèses pour simplifier et résoudre un problème géométrique s'inscrivant dans un contexte tiré du monde réel, par exemple estimer des quantités dans une situation de la vie courante, et donner des explications ; – interpréter des représentations multiples de phénomènes géométriques ; – utiliser des constructions géométriques ; – conceptualiser et élaborer des stratégies à plusieurs étapes pour résoudre des problèmes géométriques ; – utiliser des algorithmes courants (le théorème de Pythagore, par exemple) dans des situations qui ne leur sont pas familières et se livrer à des calculs de périmètre, de superficie et de volume.
4	Résoudre des problèmes leur demandant de mettre en oeuvre des compétences de raisonnement et d'argumentation d'ordre visuel et spatial dans des contextes non familiers ; relier et intégrer différentes représentations ; appliquer des processus séquentiels ; utiliser un éventail de compétences pointues de visualisation et d'interprétation d'ordre spatial.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des textes complexes pour résoudre des problèmes géométriques ; – interpréter des consignes séquentielles et suivre une procédure en plusieurs étapes ; – interpréter des éléments en utilisant leur compréhension de l'espace dans des situations géométriques inhabituelles ; – utiliser un modèle bidimensionnel pour travailler avec des représentations en trois dimensions de situations géométriques non familières ; – relier et intégrer deux représentations visuelles différentes d'une situation géométrique ; – élaborer et appliquer une stratégie de calcul dans des situations géométriques ; – raisonner et argumenter à propos de relations numériques dans un contexte géométrique ; – réaliser des calculs simples (par exemple, multiplier un chiffre à plusieurs décimales par un nombre entier, procéder à des conversions numériques sur la base de proportions et d'échelles ou calculer la surface de formes familières).

3	Résoudre des problèmes qui leur demandent un raisonnement élémentaire d'ordre visuel et spatial dans des contextes familiers ; établir des liens entre des représentations différentes d'objets familiers ; mettre en oeuvre des compétences élémentaires de résolution de problèmes (élaborer des stratégies simples) ; appliquer des algorithmes simples.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des descriptions textuelles de situations géométriques non familières ; – mettre en oeuvre des compétences élémentaires de résolution de problèmes (élaborer des stratégies simples, par exemple) ; – utiliser des compétences de perception visuelle et de raisonnement élémentaire d'ordre spatial dans une situation familière ; – travailler avec un modèle mathématique familier donné ; – effectuer des opérations simples, telles que des conversions d'échelles (par le biais de la multiplication ou d'un raisonnement proportionnel simple) ; – appliquer des algorithmes courants pour résoudre des problèmes géométriques (par exemple, calculer des longueurs dans des formes familières).
2	Résoudre des problèmes ne comptant qu'une représentation mathématique, dont le contenu mathématique est présenté sans détour et de manière claire ; utiliser la pensée et des conventions mathématiques élémentaires dans des contextes familiers.	<ul style="list-style-type: none"> – Reconnaître des formes géométriques simples ; – utiliser des définitions et des termes techniques élémentaires et appliquer des concepts mathématiques de base (la symétrie, par exemple) ; – interpréter de manière mathématique un terme comparatif courant (« plus grand », par exemple) dans un contexte géométrique ; – créer et utiliser une représentation abstraite d'un objet à deux ou trois dimensions ; – comprendre une représentation visuelle à deux dimensions d'une situation familière tirée du monde réel ; – effectuer des opérations algébriques simples (par exemple, une soustraction ou une division par un nombre à deux chiffres) pour résoudre des problèmes s'inscrivant dans un contexte géométrique.
1	Résoudre des problèmes simples dans un contexte qui leur est familier en utilisant des représentations ou des dessins familiers d'objets géométriques et en mettant en oeuvre des compétences élémentaires en calcul.	<ul style="list-style-type: none"> – Utiliser une représentation bidimensionnelle donnée pour compter ou calculer des éléments d'un objet simple à trois dimensions.

Annexe 2-2 : Domaine « Quantité »

Niveau	Compétences générales que les élèves doivent avoir	Tâches spécifiques que les élèves peuvent faire
6	<p>Conceptualiser et utiliser des modèles de processus et de relations mathématiques complexes ; travailler avec des expressions formelles et symboliques ; mettre en oeuvre des compétences pointues de raisonnement pour concevoir des stratégies leur permettant de résoudre des problèmes et d'établir des liens entre divers contextes ; appliquer des processus de calcul séquentiels ; formuler des conclusions et des arguments et donner des explications précises.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Conceptualiser des processus mathématiques complexes (par exemple, la croissance exponentielle et la moyenne pondérée) et des propriétés de nombres et des relations numériques ; – interpréter et comprendre des informations complexes et établir des liens entre de multiples sources d'information complexes ; – mettre en oeuvre des compétences pointues de raisonnement à propos de proportions, de représentations géométriques de quantité, de combinaisons et de relations entre nombres entiers ; – interpréter et comprendre des expressions mathématiques pures de relations entre nombres dans un contexte scientifique ; – effectuer des calculs séquentiels dans un contexte complexe et non familier, notamment avec des nombres importants ; – formuler des conclusions et des arguments et donner des explications précises ; – concevoir une stratégie (heuristique) pour utiliser des processus mathématiques complexes.
5	<p>Utiliser à bon escient des modèles de situations complexes pour résoudre des problèmes ; mettre en oeuvre des compétences pointues de raisonnement, d'interprétation et de compréhension approfondie sur la base de représentations différentes ; appliquer des processus séquentiels ; communiquer le fruit de leur raisonnement et leurs arguments.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des informations complexes à propos de situations de la vie réelle (des graphiques, des schémas et des tableaux complexes) ; – établir des liens entre différentes sources d'information (des graphiques, des tableaux et des textes, par exemple) ; – extraire des données pertinentes dans la description d'une situation complexe et effectuer des calculs ; – mettre en oeuvre des compétences de résolution de problèmes (par exemple, interpréter, concevoir une stratégie, raisonner ou pratiquer des comptages systématiques) dans des contextes tirés du monde réel qui leur demandent une mathématisation substantielle ; – communiquer le fruit de leur raisonnement et leurs arguments ; – faire des estimations à partir de leurs connaissances courantes ; – calculer des variations relatives et / ou absolues.
4	<p>Utiliser à bon escient des modèles simples de situations complexes ; mettre en oeuvre des compétences de raisonnement dans divers contextes et interpréter différentes représentations de la même situation ; analyser et appliquer des relations quantitatives ; mettre en oeuvre des compétences en calcul pour résoudre des problèmes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Appliquer de manière précise un algorithme numérique donné comprenant diverses étapes ; – interpréter des descriptions textuelles complexes d'un processus séquentiel ; – établir des liens entre des informations données dans un texte et une représentation graphique ; – effectuer des calculs impliquant un raisonnement proportionnel, une division ou des pourcentages dans des modèles simples de situations complexes ; – dresser des listes et faire des comptages de résultats combinatoires de manière systématique ; – identifier et utiliser des informations provenant de sources multiples ; – analyser et appliquer un système simple ; – interpréter un texte complexe pour construire un modèle mathématique simple.
3	<p>Appliquer des stratégies simples de résolution de problèmes, notamment raisonner dans des contextes familiers ; interpréter des tableaux pour localiser des informations ; effectuer des calculs explicitement décrits, dont des processus séquentiels.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter la description textuelle d'un processus de calcul séquentiel et appliquer correctement le processus ; – appliquer des processus élémentaires de résolution de problèmes (concevoir une stratégie simple, rechercher des relations, comprendre des contraintes données et en tenir compte, appliquer la méthode par tâtonnement et se livrer à un raisonnement simple) ; – effectuer des calculs impliquant des nombres importants ou portant sur la vitesse et le temps ou sur la conversion d'unités (par exemple, passer

		<p>d'un taux annuel à un taux quotidien) ;</p> <ul style="list-style-type: none"> – interpréter des informations présentées sous la forme de tableaux et localiser des données pertinentes dans un tableau ; – conceptualiser des relations impliquant un mouvement circulaire et une notion de temps ; – interpréter un texte et un diagramme décrivant un modèle simple.
2	Interpréter des tableaux simples pour identifier et extraire des informations pertinentes ; effectuer des opérations arithmétiques simples ; interpréter des relations quantitatives simples et les utiliser.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter un modèle quantitatif simple (une relation proportionnelle, par exemple) et l'appliquer en effectuant des opérations arithmétiques élémentaires ; – interpréter des données simples présentées sous forme de tableaux et établir des liens entre des informations textuelles et des données présentées sous forme de tableaux ; – identifier les calculs simples à effectuer pour résoudre un problème direct ; – effectuer des calculs simples, impliquant la réalisation d'opérations arithmétiques élémentaires et l'ordonnement de nombres.
1	Résoudre les problèmes les plus élémentaires dont toutes les données sont explicitement présentées, qui s'inscrivent dans des situations directes et d'une portée très limitée, dont la résolution demande des calculs évidents et qui correspondent à une tâche mathématique élémentaire (une opération arithmétique de base, par exemple).	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter une relation mathématique simple et explicite et l'appliquer directement en effectuant des calculs ; – lire et interpréter un tableau simple de nombres, faire le total des colonnes et comparer les résultats.

Annexe 2-3 : Domaine « Variations et relations »

Niveau	Compétences générales que les élèves doivent avoir	Tâches spécifiques que les élèves peuvent faire
6	S'appuyer sur une compréhension approfondie, mettre en oeuvre des compétences d'argumentation et de raisonnement abstrait et se servir de conventions et de connaissances techniques pour résoudre des problèmes et généraliser des solutions mathématiques à des problèmes complexes tirés du monde réel.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des informations mathématiques complexes dans des situations non familières tirées du monde réel ; – interpréter des fonctions périodiques dans un contexte tiré du monde réel et effectuer les calculs y afférents en présence de contraintes ; – interpréter des informations complexes enfouies dans une situation non familière tirée du monde réel ; – interpréter des textes complexes et utiliser des compétences de raisonnement abstrait (sur la base de leur compréhension approfondie des relations) pour résoudre des problèmes ; – utiliser à bon escient l'algèbre ou des graphiques pour résoudre des problèmes et manipuler des formules algébriques pour les adapter à une situation tirée du monde réel ; – résoudre des problèmes en se livrant à un raisonnement proportionnel complexe ; – appliquer des stratégies de résolution de problèmes comptant des étapes multiples, dont l'utilisation de formules et l'exécution de calculs ; – concevoir une stratégie et résoudre un problème en utilisant l'algèbre et la méthode par tâtonnement ; – identifier une formule qui décrit une situation complexe tirée du monde réel et généraliser des résultats préliminaires pour créer une formule de synthèse ; – généraliser des résultats préliminaires pour effectuer certains calculs ; – s'appuyer sur une compréhension approfondie de la géométrie pour travailler avec des formes complexes et les généraliser ; – conceptualiser des calculs complexes de pourcentage ; – communiquer de manière cohérente le fruit de leur raisonnement logique et leurs arguments.
5	Résoudre des problèmes en utilisant des formules et des modèles complexes d'ordre mathématique ou algébrique ; établir des liens entre des représentations mathématiques formelles et des situations complexes inspirées du monde réel ; utiliser des procédures complexes de résolution de problèmes et réfléchir à leur raisonnement et à leurs arguments avant de les communiquer.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des formules complexes dans un contexte scientifique ; – interpréter des fonctions périodiques dans un contexte tiré du monde réel et effectuer les calculs y afférents ; – appliquer des stratégies complexes de résolution de problèmes ; – interpréter des informations complexes et établir des liens entre elles ; – interpréter et appliquer des contraintes ; – identifier et appliquer une stratégie adaptée ; – réfléchir à la relation entre une formule algébrique et les données qui la sous-tendent ; – se livrer à un raisonnement proportionnel complexe, à propos de taux par exemple ; – analyser et appliquer une formule donnée dans une situation inspirée de la vie réelle ; – communiquer le fruit de leur raisonnement et exposer leurs arguments.
4	Comprendre et utiliser des représentations multiples, dont des modèles explicitement mathématiques de situations de la vie réelle, pour résoudre des problèmes pratiques ; faire preuve d'une grande souplesse lors de l'interprétation et du raisonnement, notamment dans des contextes non familiers ; communiquer leurs explications et leurs arguments.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des graphiques complexes et lire une ou plusieurs valeurs dans des graphiques ; – interpréter des représentations graphiques complexes et non familières de situations inspirées du monde réel ; – utiliser des représentations multiples pour résoudre un problème pratique ; – relier une représentation textuelle à une représentation graphique et donner des explications ; – analyser une formule décrivant une situation tirée du monde réel ; – analyser des situations géométriques à trois dimensions impliquant des

		<p>volumes et des fonctions y afférentes ;</p> <ul style="list-style-type: none"> – analyser un modèle mathématique donné impliquant une formule complexe ; – interpréter et appliquer une formule textuelle et manipuler une formule linéaire qui représente des relations inspirées du monde réel ; – effectuer une série de calculs, dont des pourcentages, des proportions, des sommes ou des divisions.
3	<p>Résoudre des problèmes qui leur demandent de travailler avec de nombreuses représentations (un texte, un graphique, un tableau ou une formule, par exemple), de se livrer à une interprétation et à un raisonnement dans des contextes familiers et de communiquer leurs arguments.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des représentations graphiques non familières de situations tirées du monde réel ; – identifier des critères pertinents dans un texte ; – interpréter un texte dans lequel un algorithme est enfoui et appliquer cet algorithme ; – interpréter un texte et concevoir une stratégie simple ; – établir des liens entre diverses représentations apparentées (entre deux graphiques, entre un texte et un tableau ou entre une formule et un tableau, par exemple) ; – se livrer à un raisonnement proportionnel dans divers contextes familiers et communiquer leurs arguments ; – appliquer une situation ou un critère textuel donné à un graphique ; – appliquer une série de procédures simples de calcul pour résoudre des problèmes, notamment trier les données, calculer des écarts et procéder à des interpolations linéaires.
2	<p>Utiliser des algorithmes, des formules et des procédures simples pour résoudre des problèmes ; établir des liens entre un texte et une représentation unique (un graphique, un tableau ou une formule) ; mettre en oeuvre des compétences élémentaires d'interprétation et de raisonnement.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter un texte simple et le relier correctement à des éléments graphiques ; – interpréter un texte simple qui décrit un algorithme peu complexe et appliquer cet algorithme ; – interpréter un texte simple et se livrer à un raisonnement proportionnel ou effectuer un calcul ; – interpréter un modèle simple ; – appliquer des compétences d'interprétation et de raisonnement dans un contexte pratique, qui traite d'une application simple et familière de relations de mouvement, de vitesse et de temps ; – localiser des informations pertinentes dans un graphique et lire des valeurs directement dans un graphique ; – remplacer correctement des éléments par des chiffres pour appliquer un algorithme numérique ou une formule algébrique simple.
1	<p>Localiser des informations pertinentes dans un tableau ou un graphique simple ; suivre des consignes directes et simples pour lire des informations directement dans un tableau ou un graphique au format classique ou familier ; effectuer des calculs simples à propos de relations entre deux variables familières.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Etablir un rapport élémentaire entre un texte et un élément spécifique d'un graphique simple et lire une valeur dans le graphique ; – localiser et lire une valeur donnée dans un tableau simple ; – effectuer des calculs simples à propos de relations entre deux variables familières.

Annexe 2-3 : Domaine « Incertitude »

Niveau	Compétences générales que les élèves doivent avoir	Tâches spécifiques que les élèves peuvent faire
6	<p>Appliquer des compétences pointues de réflexion et de raisonnement dans des contextes statistiques ou probabilistes pour créer des représentations mathématiques de situations tirées du monde réel ; se livrer à une réflexion et s'appuyer sur une compréhension approfondie pour résoudre des problèmes ; formuler et communiquer des arguments et des explications.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des situations tirées du monde réel et réfléchir à leur propos en appliquant des connaissances en matière de probabilité et effectuer les calculs requis comportant des nombres importants et demandant un raisonnement proportionnel et des arrondis ; – faire preuve d'une compréhension approfondie des probabilités dans un contexte pratique ; – mettre en oeuvre des compétences pointues d'interprétation et de raisonnement logique dans une situation probabiliste non familière et s'appuyer sur une compréhension approfondie ; – construire une argumentation rigoureuse sur la base d'une interprétation intelligente des données ; – se livrer à un raisonnement complexe en utilisant des concepts statistiques ; – comprendre des notions élémentaires d'échantillonnage et effectuer des calculs avec des moyennes pondérées ou appliquer des stratégies intelligentes de comptage systématique ; – communiquer des explications et des arguments complexes.
5	<p>Appliquer des connaissances probabilistes et statistiques dans des problèmes relativement structurés dont la représentation mathématique est en partie visible ; mettre en oeuvre des compétences de raisonnement et de compréhension approfondie pour interpréter et analyser les informations données, élaborer des modèles appropriés et appliquer des processus de calcul séquentiels ; communiquer le fruit de leur raisonnement et leurs arguments.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter les résultats d'une expérience probabiliste non familière et y réfléchir ; – interpréter des textes en langage technique et les transposer dans un calcul de probabilité approprié ; – identifier et extraire les informations pertinentes, interpréter des informations en provenance de sources différentes (de textes, de tableaux multiples ou de graphiques, par exemple) et établir des liens entre elles ; – réfléchir à des situations probabilistes classiques et les comprendre ; – appliquer des concepts de probabilité pour analyser des situations ou des phénomènes inhabituels ; – appliquer un raisonnement proportionnel et raisonner sur la base de concepts statistiques ; – se livrer à un raisonnement en plusieurs étapes sur la base de données ; – procéder à une modélisation complexe, leur demandant d'utiliser des connaissances en probabilité et des concepts statistiques (par exemple, l'aléatoire, l'échantillon et l'indépendance) ; – effectuer des calculs (additions, proportions, multiplication de nombres importants, arrondis) pour résoudre des problèmes s'inscrivant dans des contextes statistiques non familiers ; – effectuer une série de calculs connexes ; – se livrer à un raisonnement probabiliste et communiquer ce raisonnement et l'argumentation.
4	<p>Utiliser des concepts élémentaires de statistique et de probabilité et les intégrer dans leur raisonnement numérique pour résoudre des problèmes simples s'inscrivant dans des contextes peu familiers ; appliquer des processus de calcul séquentiels ou comptant plusieurs étapes ; construire et communiquer une argumentation sur la base de l'interprétation des données.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des textes dans des contextes non familiers (scientifiques), mais directs ; – comprendre certains aspects des données présentées dans des tableaux ou des graphiques ; – traduire correctement des descriptions textuelles en calculs de probabilité ; – identifier et sélectionner des données dans divers graphiques statistiques et effectuer des calculs élémentaires ; – comprendre des définitions et des concepts statistiques élémentaires (la probabilité, la valeur prévue, l'aléatoire et la moyenne, par exemple) ; – utiliser des connaissances élémentaires en probabilité pour résoudre des

		<p>problèmes ;</p> <ul style="list-style-type: none"> – élaborer une explication mathématique élémentaire d'un concept quantitatif exprimé en langage courant (par exemple, une « énorme augmentation ») ; – utiliser des arguments mathématiques sur la base de données ; – se livrer à un raisonnement numérique ; – effectuer des calculs comptant plusieurs étapes, dont des opérations arithmétiques élémentaires, et utiliser des pourcentages ; – extraire des informations d'un tableau et communiquer une argumentation simple basée sur ces informations.
3	Interpréter des informations et des données statistiques et établir des liens entre différentes sources d'information ; se livrer à un raisonnement simple en utilisant des symboles, des conventions et des concepts élémentaires de probabilité ; communiquer leur raisonnement.	<ul style="list-style-type: none"> – Interpréter des données présentées sous forme de tableaux ; – interpréter des graphiques inhabituels et lire leur contenu ; – se livrer à un raisonnement pour identifier des résultats de probabilité dans une expérience de probabilité complexe, mais familière et bien définie ; – comprendre certains aspects de la présentation des données (par exemple, la numérotation) ; établir des liens entre des informations présentées dans deux tableaux différents ; intégrer des données dans un type approprié de graphique ; – communiquer un raisonnement de bon sens.
2	Localiser des informations statistiques présentées dans des formats graphiques familiers ; comprendre des conventions et des concepts statistiques élémentaires.	<ul style="list-style-type: none"> – Identifier des informations pertinentes dans un graphique simple et familier ; – établir des liens entre un texte et un graphique connexe dont le format est courant et familier ; – comprendre et expliquer des calculs statistiques simples (la moyenne, par exemple) ; – lire des valeurs directement dans un format courant de présentation des données (un diagramme à barres, par exemple).
1	Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité dans des contextes familiers d'expérimentation.	<ul style="list-style-type: none"> – Comprendre des concepts élémentaires de probabilité dans des expérimentations simples et familières (avec des dés à jouer ou des pièces de monnaie) ; – réaliser des listes et des comptages systématiques de résultats combinatoires dans une situation de jeu limitée et bien définie.