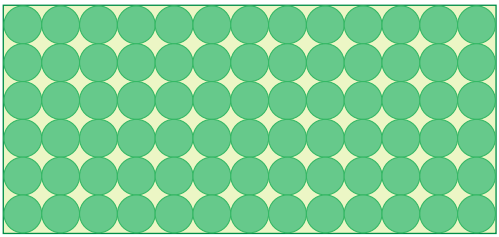
Corrigé de l'exercice 1.

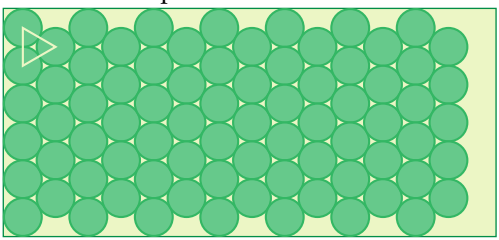
Recherche d'une disposition efficace

1. **a.** On considère ABC un triangle équilatéral de côté 2, H le pied de la hauteur issue de A. ABH est un triangle rectangle, on a alors d'après Pythagore que : $BH^2 + AH^2 = AB^2$. Soit $h^2 = 4 - 1 = 3$, d'où $h = \sqrt{3}$.

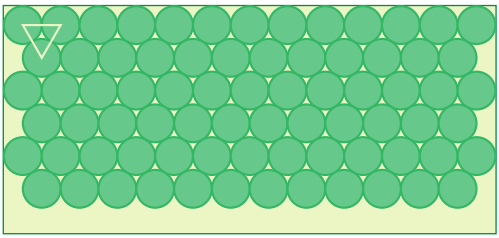
b. Sur la longueur L, il y a $n - 1$ triangles équilatéraux de côtés 2 et deux rayons, soit $2 + (n-1)\sqrt{3}$.



Disposition 1 en carré



Disposition 2 en triangles colonnes



Disposition 3 en triangles lignes

Figure 1

2.
- Pour la disposition en carré. Il y a 13 disques sur une largeur et 6 sur la hauteur, soit $13 \times 6 = 78$.
- En largeur, n doit vérifier : $2 + (n-1)\sqrt{3} = 26$, soit $n = 8\sqrt{3} + 1$ soit 14 cercles. Verticalement, il y a 6 disques, une colonne sur 2 comptant 5 disques. Soit au total $7(6+5) = 77$ disques.

- Horizontalement, il y 13 disques sur la première ligne et 12 sur la deuxième ligne. Verticalement, $2(n-1)\sqrt{3} = 12$, soit $n = \dfrac{10\sqrt{3}+3}{3} = 6$ disques. Au total, on a $3(13+12) = 75$.

La première configuration est plus remplie que les deux autres.

Proportion d'aire occupée par les disques

1. • Pour la configuration 1, $P = \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0,7854$.

- Pour les dispositions 2 et 3. On note c le côté de l'héxagone, il vérifie, $c^2 = 1+\dfrac{c^2}{2}$, soit $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Donc, l'aire d'un hexagone est donc $6\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2} = 2\sqrt{3}$.

  $P' = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,9069$.

2. Quand n est grand on approche le rapport entre l'aire a occupée et l'aire A du casier est proche de P. Soit $P \approx \dfrac{a}{A}$. Comme les disques ont une aire de π, on en déduit que $a = n\pi$ et donc que $P \approx \dfrac{n\pi}{A}$ soit $n \approx \dfrac{PA}{\pi}$

- Pour la dispositon 1, cela donne $n \approx \dfrac{A}{4}$.
- Pour les dispositions 2 et 3 cela donne $n \approx \dfrac{A\sqrt{3}}{6}$.

Une disposition plus efficace

On décale un bloc de 3 triangles Verticalement. On note z, ce décalage, et y la distance horizontale entre deux centres, qui sont séparés de 2 (voir la figure 2). Verticalement, on a alors : $1+z+\sqrt{3}+1 = 4$, soit $z = 2-\sqrt{3}$.

Alors $y^2+z^2 = 4$, ce qui donne $y = \sqrt{4-z^2} = \sqrt{4\sqrt{3}-3}$.

En retirant le premier disque (plein sur la figure) et 7 disques qui occupe une largeur de $2y$. Ce bloc ce répète, $(2+2y)r = 442$, soit $r = \dfrac{442}{2+2y} \approx 74$.

Il y a donc 1 disque (plein), 5 disques complets dans un motif, et deux demi-disques, soit $1+74\times5+74 = 455$ disques.

Corrigé de l'exercice 2.

Longueur minimale d'une suite k-complète

1. **a.** Il n'y a qu'une suite 1-complète, elle est de longueur 10 : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

b. La suite 1-complète minimale est la seule suite 1-complète précédente.

2. Les suites minimales k-complètes sont de longueur 1, avec des nombres de k chiffres comportant tous les chiffres. Par exemple $\{1234567890\ldots0\}$, avec $k-9$ zéro.

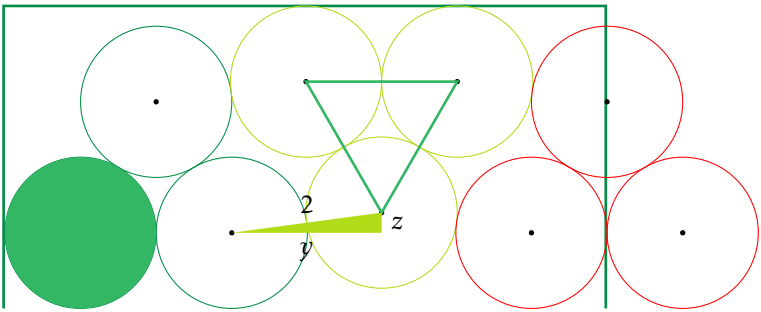


Figure 2

3. Une suite 9-complète comporte forcément au moins deux nombres. La suite $\{123\,456\,789, 123\,456\,790\}$

4. **a.** La suite $\{234, 235, 236, 237, 238, 238, 240\}$ est une suite 3-complète de longueur 7.

b. Avec 6 nombres consécutifs, on ne peut pas couvrir une dizaine. On est au maximum sur deux dizaines consécutives.

Avec tous le même chiffre des centaines, il y a alors $9 = 6 + 2 + 1$ chiffres différents.

Si le chiffre des centaines est différent, alors un des nombres doit comporter deux fois le chiffre 9 et le suivant se termine par 00. Donc, on a 8 chiffres qui apparaissent : $6 + 2$.

5. Suite 8-complète $\{12\,345\,679, 12\,345\,680\}$, on ne peut pas faire mieux. Un seul nombre de 8 chiffres ne pouvant contenir tous les chiffres. Toute permutation de 123 456 permettant de faire une autre suite. Par contre les deux derniers chiffres sont obligatoires, car il faut être sur un changement de dizaine, on ne peut pas prendre un des six premiers chiffres, un doublement de chiffres n'étant pas rentable. Ces quatres chiffres étant tous distincts.

Suite 7-complète $\{2\,345\,679, 2\,345\,680, 23\,456\,781\}$ Le changement de dizaine est optimal, la partie 23 456 l'est aussi, sinon, on double un chiffre ce qui conduit à rajouter un nombre.

Suite 6-complète $\{345\,679, 345\,680, 345\,681, 345\,682\}$

Suite 5-complète $\{45\,679, 45\,680, 45\,681, 45\,682, 45\,683\}$

Suite 4-complète $\{5\,679, 5\,680, 5\,681, 5\,682, 5\,683, 5\,684\}$

Suite 4-complète $\{679, 680, 681, 682, 683, 684, 685\}$

La suite 2-complète $\{79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86$ est minimale.

on démontre, de même que les suites précédentes sont minimum. Il faut un changement de dizaine, et le changer à 80 est optimum car il n'y a pas de nombre avec un deux chiffres identiques.

Dénombrement des suites k-complètes minimales

1. Pour le chiffre le plus à gauche, il y a 9 possibilités, tous les chiffres non nuls ; pour le deuxième chiffre, il y a encore 9, tous les chiffres non nuls, plus le zéros. Ensuite, on enlève, cela décroît.

   Donc, le nombre de suite 10-complète est donc $9 \times 9! = 3\,265\,920$.

2. **a.** Sans changement de dizaine, une suite 4-complète minimale, n'apporte que 6 chiffres distincts pour les unités, plus le chiffre des dizaines, soit 7 chiffres. Les dizaines et milliers étant constantes, elles n'apportent que deux chiffres, soit 9 chiffres. Pour qu'elle soit minimale, une suite de 4-complète doit changer de dizaine. Le chiffre des unités peut donc prendre les valeurs 5, 6, 7, 8, 9.

   b. Soit u un chiffre compris entre 5 et 9. Les six nombres de la suite 4-complète minimale, apporte 6 chiffres distincts, entre u et $u+6$.

   5 : 6, 7, 8, 9, 0 ; d doit être 1, 2, 3, 4. Mais 4 est exclu, car alors, on retrouve 5 au changement de valeur, ce qui n'apporte pas de valeurs nouvelles

   6 : 7, 8, 9, 0, 1 ; d doit être 2, 3, 4, 5, sauf 5

   7 : 8, 9, 0, 1, 2 ; d doit être 3, 4, 5, 6 sauf 6.

   8 : 9, 0, 1, 2, 3 ; d doit être 4, 5, 6, 7. sauf 7.

   9 : 0, 1, 2, 3, 4 ; d doit être 5, 6, 7, 8., sauf 8.

   Au final, si on choisit u, le chiffre des unités est $u-4$, ou $u-3$ ou $u-2$

   c. Il reste à choisir les deux premiers chiffres, parmi les chiffres qui reste, qui ne sont que deux. Donc, un seul choix et deux possibilités par permutation.

Corrigé de l'exercice 3.

1. **a.** $S_2 = 3$, $S_3 = 8$ et $S_4 = 20$.

   b. On obtient :

1, 2, 3, 4, 5,	1, 2, 3, 4, 5, 6,
3, 5, 7, 9,	3, 5, 7, 9, 11,
8, 12, 16,	8, 12, 16, 20,
20, 28,	20, 28, 36,
48	48, 64,
	112

   $S_5 = 48$ et $S_6 = 112$

2. **a.** On considère trois nombres consécutifs sur la première ligne : $p-1$, p et $p+1$. Alors les deux nombres sur la deuxième ligne sont $2p-1$ et $2p+1$ dont la différence est 2.

   b. Trois nombres consécutifs sur la deuxième ligne, $2k-1$, $2k+1$ et $2k+3$. Les nombres sur la troisième ligne sont : $4k$ et $4k+4$. La différence est donc de 4.

c. Sur la 4e ligne, la différence sera de $8 = 2^3$; sur la 5e ligne, la différence sera de $16 = 2^4$; sur la pe, la différence sera de 2^{p-1}.

d. La première possède n nombres, la 2e possède $n-1$, la 3e $n-2$; la pe possède $n-p+1$.

e. Sur la pe ligne commence par S_n, le 2e est augmenté de 2^{p-1}, le 3e de $2 \times 2^{p-1}$, le dernier sera augmenté de $(n-p) \times 2^{p-1}$. Il y a bien $n-p+1$ nombres sur cette ligne.

3. **a.** S_n est la somme des deux nombres sur la précédente ligne, soit S_{n-1} et $S_{n-1} + 2^{p-2}$, d'après la question précédente.
On a donc $S_n = 2S_n + 2^{p-2}$.

b. On obtient

```
Saisir une valeur pour N
S ← 0
pour k allant 1 à N − 1 faire
  | S ← 2 * S + 2^(k−1)
fin
Afficher S
```

c. On obtient 5 505 024.

4.

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_{n-1} + 2^{n-2} \\ &= 2^2 S_{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^2 S_{n-2} + 2 \times 2^{n-2} \\ &= 2^3 S_{n-3} + 3 \times 2^{n-2} \\ &= \dots \\ &= 2^{n-2} S_2 + (n-2) \times 2^{n-2} \end{aligned}$$

On en déduit que S_n est divisible par 2^{n-2}.

5. On a donc $S_n = 2^{n-2}(3+n-2) = 2^{n-2}(n+1)$.
Soit $S_6 = 2^4 \times 7 = 112$ et $S_{20} = 2^{18} \times 21 = 5\,505\,024$.

6. On en déduit la valeur de $S_{2019} = 2^{2017} \times 2020$.