Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère les trois entiers naturels a, b et c qui, dans le système de numération à base n, s'écrivent :

$$a = 1983, \quad b = 11, \quad c = 12.$$

1. Prouver que P. G. C. D$(a,\ b)$ = P. G. C. D$(b,\ 3)$.
   En déduire les différentes valeurs possibles de P. G. C. D$(a,\ b)$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier n les deux nombres a et b sont-ils premiers entre eux? En dresser la liste pour n strictement inférieur à vingt-cinq.
3. Vérifier que $a = (n+2)\left(n^2+7n-6\right)+15$.
   Par un raisonnement analogue à celui du 1, trouver les différentes valeurs possibles de P. G. C. D$(a,\ c)$.
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on P. G. C. D(a, b) = P. G. C. D$(a,\ c)$?
   En dresser la liste pour n strictement inférieur à 25.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & x(\log|x|)^2, \quad \text{pour } x \neq 0. \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de l'application f. On précisera en particulier la continuité et la dérivabilité en 0.
   Tracer la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, en prenant 4 cm pour unité de longueur.
2. On désigne par $I(a)$ l'intégrale

$$\int_a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour } a > 0.$$

   Calculer $I(a)$. Calculer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers zéro.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

1. Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ on considère la courbe C d'équation

$$2x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

   Déterminer la nature de cette courbe et la tracer.

2. Pour chaque nombre réel t, on désigne par $M(t)$ le point du plan, dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont

$$x = \cos^2 t, \quad y = \sqrt{2} \sin t \cos t.$$

Montrer que le point $M(t)$ appartient à la courbe C quel que soit t. Pour chaque point A de la courbe C, montrer qu'il existe un nombre réel t unique tel que l'on ait

$$A = M(t) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t < \pi.$$

Déterminer les coordonnées des points $M(t)$ qui correspondent aux valeurs suivantes de t :

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{12}$$

Partie B

Dans toute la suite du problème, on désigne par E un espace vectoriel euclidien orienté et par $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E; on désigne par a et b deux nombres réels quelconques et on pose

$$\vec{u} = 2a\,\vec{\imath} - b\,\vec{\jmath} - b\,\vec{k}.$$

1. On désigne par D le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{u}$. Soit T le sous-espace vectoriel de E orthogonal à D. Quelles sont les dimensions de D et de T suivant les valeurs de a et b?

Lorsque T est un plan vectoriel, écrire son équation cartésienne.

2. On désigne par f l'endomorphisme de E défini analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & (1-2a)x + by + bz \\ y' & = & bx + ay + (a-1)z \\ z' & = & bx + (a-1)y + az. \end{array}\right.$$

L'endomorphisme f fait ainsi correspondre au vecteur de coordonnées $(x\,;\, y\,;\, z)$ le vecteur de coordonnées $\left(x'\,;\, y'\,;\, z'\right)$.

Déterminer l'endomorphisme $f \circ f$ de E par son expression analytique. En déduire que l'endomorphisme f est une involution si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$(*) \qquad 2a^2 + b^2 - 2a = 0.$$

3. On suppose désormais dans toute la suite du problème que la condition (*) ci-dessus est satisfaite.

L'endomorphisme f est-il une isométrie?

Déterminer les vecteurs invariants par f. Déterminer f(û). Caractériser f.

4. On considère l'endomorphisme s de E défini analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x, \\ y' & = & y, \\ z' & = & z. \end{array}\right.$$

On pose $g = f \circ s$.

a. Quelle est la nature de l'endomorphisme s?

Que peut-on dire, sans calcul, de l'endomorphisme g?

b. Soit F la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$. Soit U le plan vectoriel orthogonal à la droite vertorielle F.

Déterminer une base orthonormée du plan vectoriel U de la forme $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{v}\right)$ où $\overrightarrow{\imath}$ est le premier vecteur de la base $\mathscr{B}$ de E.

c. Exprimer $g\left(\overrightarrow{\imath}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{v}$.

En déduire la caractérisation complète de g.

d. Appliquer ce qui précède au cas particulier suivant

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5. On pose $h = s \circ f$, $g^1 = g$, $h^1 = h$ et , par récurrence, pour tout entier $n > 1$, $g^n = g^{n-1} \circ g$ et $h^n = h^{n-1} \circ h$.

On désigne par G l'ensemble de tous les endomorphismes suivants :

$$g \circ h, \qquad g^n \quad \text{et} \quad h^n \quad \text{pour } n \text{ entier naturel non nul.}$$

Montrer que $(G,\ \circ)$ est un groupe commutatif.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres a et b pour que G soit fini.

(On pensera à se servir du résultat de la partie A du problème.)