Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1973

EXERCICE 1

Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} + \ln\frac{x+1}{x-1}$$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Montrer que f est impaire et la représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Calculer la dérivée de l'expression :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1).$$

et l'aire du domaine plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = a\ \ (a > 2)$ l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$.
Cette aire a-t-elle une limite lorsque a tend vers l'infini ?

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. L'équation suivante est écrite dans C :

$$z^2 - (1+m)(1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}\left(m^2+1\right) = 0 \qquad (1)$$

1. En faisant le changement d'inconnue $z = (1+\mathrm{i})u$, dans (1) former une équation (2) dont u soit racine. La résoudre dans $\mathbb{C}$.
2. Soient u_1 et u_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de (2) et soient M_1 et M_2 les images ponctuelles de u_1 et u_2. Montrer que M_2 se déduit de M_1 par une transformation ponctuelle simple dont on donnera les éléments géométriques.

PROBLÈME

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère l'application affine T_k transformant le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5x' & = & (4+k)x + 2(1-k)y \\ 5y' & = & 2(1-k)x + (1+4k)y \end{array}\right.$$

où k est un réel quelconque.

Partie A

1. Ecrire la matrice A_k de l'application linéaire associée à T_k par rapport à la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer qu'on peut trouver deux matrices P et Q à deux lignes et deux colonnes, à éléments réels telles que :

$$A_k = P + kQ.$$

2. T_k est-elle bijective pour tout $k \in \mathbb{R}$?
Soit $\mathcal{T} = \left\{T_k / k \in \mathbb{R}^\star\right\}$. $\circ$ désignant la composition habituelle des applications, $(\mathcal{T},\ \circ)$ est-il un groupe ?
Définir analytiquement, lorsqu'elle existe, T_k^{-1}.

3. T_k est-elle involutive en général ? Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles T_k est involutive ?

Partie B

1. On choisit $k = 0$.

a. Quelle est l'image du plan par T_0 ?

b. Quelle est la nature géométrique de T_0 ?

2. On choisit $k = -1$. Caractériser géométriquement T_{-1}.

Partie C

1. Soient f_1 et f_2 les fonctions réelles de la variable réelle x définie par :

$$f_1(x) = 3x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2+1}, \qquad f_2(x) = 3x - \frac{5}{2}\sqrt{x^2+1}$$

a. Comparer $f_1(x)$ et $f_2(-x)$. Étudier les variations de f_1 et de f_2 et tracer les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. On note $C = C_1 \cup C_2$. Montrer que le point $M(x\ ;\ y)$ appartient à C si et seulement si :

$$4y^2 + 11x^2 - 24xy - 25 = 0$$

2. **a.** Déterminer les transformées par T_{-1} des droites :

$$2y - 11x = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y = 0$$

b. Quelle est la transformée de C par T_{-1} ?

c. Quelle est la nature géométrique de C ?

N. B. - C - 1. est indépendant des questions précédentes.