Baccalauréat C Clermont septembre 1970

EXERCICE 1

Déterminer les couples, $\left(u_0,\ q\right)$, d'entiers positifs premiers entre eux, sachant que les termes de la suite géométrique u_0, u_1, u_2 et u_3, de raison q, vérifient l'égalité

$$u_1 + 2u_3 = 44u_0^2.$$

EXERCICE 2

1. Log x désigne le logarithme népérien de x.
   Soit f la fonction définie, pour x positif, par

$$f(x) = \text{Log}^2 x.$$

   Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.
2. Calculer la dérivée de la fonction G définie, pour x positif, par

$$G(x) = x(\text{Log}^2 x - 2\text{Log}\, x).$$

   En déduire une primitive de f.
3. Soit A le point commun à (C) et à Ox et I le point, distinct de A, tel que la tangente en I à (C) passe par O. Trouver les coordonnées de I et l'aire limitée par l'arc AB de (C) et les segments OI et OA.

EXERCICE 3

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
Pour λ réel, on définit l'application

$$\begin{array}{llll} f_\lambda : \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C}, & \\ z & \longmapsto & Z = f_\lambda(z) = (1+\lambda\text{i})z - \lambda\text{i}. \end{array}$$

1. La fonction f_λ est-elle bijective ?
2. Soit M l'image de Z et m celle de z dans le plan complexe. Chaque application f_λ définit une transformation ponctuelle plane T_λ et l'on note $M = T_\lambda(m)$.
   a. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathbb{C}$, soit z_0, tel que pour tout λ réel $f_\lambda(z_0) = z_0$ et soit m_0 son image.
   b. Quelle est la nature de T_λ ?
   c. Calculer $\dfrac{Z-z}{z-z_0}$ et en déduire le produit scalaire $\overrightarrow{m_0m} \cdot \overrightarrow{mM}$.
3. **a.** Pour m fixé et λ variable, déterminer l'ensemble des points $M = T_\lambda(m)$.
   b. Pour M fixé et λ variable, déterminer l'ensemble des points m tels que $M = T_\lambda(m)$.
   c. Soit O, F, F$'$, A et A$'$ les points de l'axe réel d'abscisses respectives 0, $+1, -1$, a et $-a$, où a est strictement positif et différent de 1.
   Pour λ variable, déterminer

$$\begin{array}{lcl} \text{l'ensemble des points } \Omega & = & T_\lambda(\text{O}), \\ \text{l'ensemble des points K} & = & T_\lambda(\text{A}), \\ \text{l'ensemble des points K}' & = & T_\lambda\left(\text{A}'\right). \end{array}$$

   Soit (O) le cercle de diamètre AA$'$.

4. **a.** Écrire l'équation du transformé (Ω) du cercle (O). En donner une définition géométrique.

b. Soit I le pied de la polaire de F par rapport à (Ω).

Déterminer le point H tel que $\mathrm{I} = T_\lambda(\mathrm{H})$.

Pour λ variable déterminer l'ensemble des points I.

c. La parallèle à l'axe réel menée par I rencontre (Ω) en P et P$'$.

Pour a donné et λ variable, discuter l'existence des points P et P$'$ (il y a deux cas suivant les valeurs de a).

Montrer que, quand λ varie, les points P et P$'$ restent sur une même conique, (Γ), dont on donnera l'équation.

d. Préciser la nature de (Γ) suivant les valeurs de a.

Dire ce que sont, pour cette conique (Γ),

- les points O, A, A$'$, F, F$'$;
- l'ensemble des points Ω ;
- l'ensemble des points K ;
- l'ensemble des points K$'$ déterminés à la question 3. c. ;
- l'ensemble des points I de la question 4. b.

e. En supposant $\lambda \neq 0$, écrire l'équation du cercle qui passe par F, F$'$ et O. Vérifier qu'il passe par P et par P$'$. Y-a-t-il d'autres points que P et P$'$, communs à ce cercle et à (Γ) ?

Que se passe-t-il pour $\lambda = 0$?