~ Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1980 ~

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. $M(x\,;\ y)$ et $M'\left(x'\,;\ y'\right)$ étant deux points quelconques de P, on définit dans P la relation binaire $\mathscr{R}$ de la manière suivante :

$$M \mathscr{R} M' \iff 9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 9x'^2 - 4y'^2 - 36x' - 24y'.$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans P.
Soit A le point de coordonnées $(0\,;\ -3)$. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe γ_{A} classe d'équivalence de A. Construire γ_{A} et donner son centre, ses sommets, ses asymptotes.

2. Soit B le point de coordonnées $(u\,;\ v)$. Discuter, selon les valeurs des réels u et v, la nature de γ_{B}.

EXERCICE 2

Soit E_3 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de cet espace vectoriel.
f étant une application linéaire de E_3 dans E_3 (endomorphisme de E_3), on note Ker f le noyau de f et Im f son image.

1. Dans cette question, f est l'endomorphisme de E_3 qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ de E_3 fait correspondre le vecteur $f(\vec{u}) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 2x + 5y + 5z\\ y' &=& x + 2y + 2z\\ z' &=& x + 3y + 3z. \end{array}\right.$$

Déterminer Ker f et Im f et démontrer que Ker $f \subset \text{Im} f$. Déterminer Ker $(f\circ f)$ et Im $(f \circ f)$; démontrer que Ker $(f\circ f)$ et Im $(f\circ f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E_3.

2. Dans cette question, on suppose que Ker f est une droite vectorielle de base $\overrightarrow{e_1}$ telle que Ker $f \subset \text{Im} f$. Démontrer que

— Im f est un plan vectoriel qui contient $\overrightarrow{e_1}$; on notera $\overrightarrow{e_2}$ un vecteur de Im f indépendant de $\overrightarrow{e_1}$;
— Im $(f\circ f)$ est une droite vectorielle telle que Im $(f\circ f) \subset \text{I}m\, f$;
— Ker $(f\circ f)$ est un plan vectoriel tel que Ker $f \subset \text{Ker}(f\circ f)$.

N. B. - On rappelle que les dimensions de Ker f et Im f ont pour somme la dimension de E_3.

PROBLÈME

On se propose d'étudier la famille de fonctions réelles de variable réelle définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\text{e}^{-nx}}{1 + \text{e}^{-nx}}.$$

On pourra remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\text{e}^{nx} + \text{e}^{(n-1)x}}.$$

Partie A

1. **a.** n est fixé dans $\mathbb{N}$. Étudier les variations de f_n ainsi que les branches infinies de sa courbe représentative $\mathscr{C}_n$ (on ne construira pas cette courbe). On fera un tableau de variations pour chacun des cas $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

   b. Démontrer que lorsque n décrit $\mathbb{N}$ les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2. Étude des fonctions f_0 et f_1

   a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_0(-x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$?

   b. Calculer $f''(0)$, dérivée seconde de f_0. Pour quelle valeur x_0 a t-on $f''(x_0) = 0$? Trouver une équation de la tangente à C_0 au point d'abscisse x_0.

   c. Démontrer que le point Ω déterminé en 1. b. est centre de symétrie de chacune des courbes C_0 et C_1.

   d. Construire les courbes C_0 et C_1 (repère orthonormé, unité 4 cm).

3. Étude de la fonction f_2

   a. Démontrer que l'application f_2 admet une application réciproque notée φ dont on précisera seulement l'ensemble de définition et quelques propriétés (continuité, sens de variation, dérivabilité). On notera Γ la courbe représentative de φ.

   b. Trouver une équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse nulle et une équation de la tangente à Γ au point $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}~;~0\right)$.

   c. Construire les courbes C_2 et Γ (repère orthonormé, unité 4 cm).

Partie B

Soit la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Remarquer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) = 1 + \mathrm{e}^x;$$

   en déduire la valeur de u_0.

   b. Étudier $u_0 + u_1$; en déduire la valeur de u_1.

2. **a.** Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = u_n + u_{n+1}.$$

   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n}$.

   b. En déduire que v_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

3. Après avoir étudié le signe de u_n déduire de 2. b. que u_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.