Baccalauréat Clermont septembre 1966
série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

On donne un système d'axes orthonormé direct $x'Ox$, $y'Oy$. On note J l'inversion de centre O de puissance $k = 4$.
Γ est un cercle dont le centre, A, est le point de coordonnées $(+2\,;\,0)$ et dont le rayon est égal à 1.
Γ' est l'inverse de Γ par l'inversion J.

1. Déterminer les coordonnées du centre, B, de Γ' et le rayon de Γ'.
2. Déterminer le centre d'homothétie, S, autre que O de Γ et Γ' et la puissance de l'inversion de centre S qui échange Γ et Γ'.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $x'Ox$, $y'Oy$. A est un point fixe, de coordonnées $(0\,;\,a)$ (avec $a > 0$) ; B est un point variable, de coordonnées $(u\,;\,0)$; C est un point variable, de coordonnées $(v\,;\,0)$.
L'angle orienté de droites (AC, AB) vérifie la relation

$$(\text{AC, AB}) = \alpha \quad (\text{mod.}\,\pi)$$

(α est un nombre réel donné).
BS est la parallèle à AC menée par B ; CT est la parallèle à AB menée par C ; Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω est le centre de Γ.

Première partie

On suppose $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; de plus, u et v sont différents de 0 et vérifient la condition $v < u$.

1. Indiquer une relation liant u et v et montrer que l'on a $u > 0$ et $v < 0$.
2. Déterminer u et v en fonction de l'abscisse, ω, du centre, Ω, de (Γ).
3. Déterminer u et v en fonction du rayon, R, du cercle (Γ) (discuter).
4. M est le point d'intersection d'ordonnée positive de la médiatrice de BC et du cercle (Γ). Montrer que M décrit une partie d'une conique, dont on indiquera l'équation, les foyers, l'excentricité.
   Préciser quelle est la partie de la conique décrite par M.
5. Trouver l'enveloppe de la droite BS et l'enveloppe de la droite CT.
   On indiquera avec précision l'ensemble décrit par le point de contact de chacune des droites avec son enveloppe.

Seconde partie

α est un nombre réel quelconque vérifiant la condition $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ et différent de 0.
Les nombres u et v ne sont plus astreints à aucune condition.

1. On note B$'$ la projection de A sur BS et C$'$ la projection de A sur CT.
   Trouver les lieux de B$'$ et C$'$ et les enveloppes des droites BS et CT.
2. On note K la projection de Ω sur la droite BC.
   Calculer le rapport $\dfrac{\Omega\text{A}}{\Omega\text{K}}$ en fonction de α et en déduire le lieu de Ω. Montrer que le cercle (Γ) reste tangent à un cercle fixe.