

♻ Baccalauréat Clermont septembre 1966 ♻
série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

On donne un système d'axes orthonormé direct $x'Ox$, $y'Oy$. On note J l'inversion de centre O de puissance $k = 4$.

Γ est un cercle dont le centre, A , est le point de coordonnées $(+2; 0)$ et dont le rayon est égal à 1.

Γ' est l'inverse de Γ par l'inversion J .

1. Déterminer les coordonnées du centre, B , de Γ' et le rayon de Γ' .
2. Déterminer le centre d'homothétie, S , autre que O de Γ et Γ' et la puissance de l'inversion de centre S qui échange Γ et Γ' .

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $x'Ox$, $y'Oy$. A est un point fixe, de coordonnées $(0; a)$ (avec $a > 0$); B est un point variable, de coordonnées $(u; 0)$; C est un point variable, de coordonnées $(v; 0)$.

L'angle orienté de droites (AC, AB) vérifie la relation

$$(AC, AB) = \alpha \pmod{\pi}$$

(α est un nombre réel donné).

BS est la parallèle à AC menée par B ; CT est la parallèle à AB menée par C ; Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω est le centre de Γ .

Première partie

On suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$; de plus, u et v sont différents de 0 et vérifient la condition $v < u$.

1. Indiquer une relation liant u et v et montrer que l'on a $u > 0$ et $v < 0$.
2. Déterminer u et v en fonction de l'abscisse, ω , du centre, Ω , de (Γ) .
3. Déterminer u et v en fonction du rayon, R , du cercle (Γ) (discuter).
4. M est le point d'intersection d'ordonnée positive de la médiatrice de BC et du cercle (Γ) . Montrer que M décrit une partie d'une conique, dont on indiquera l'équation, les foyers, l'excentricité.
Préciser quelle est la partie de la conique décrite par M .
5. Trouver l'enveloppe de la droite BS et l'enveloppe de la droite CT .
On indiquera avec précision l'ensemble décrit par le point de contact de chacune des droites avec son enveloppe.

Seconde partie

α est un nombre réel quelconque vérifiant la condition $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et différent de 0.

Les nombres u et v ne sont plus astreints à aucune condition.

1. On note B' la projection de A sur BS et C' la projection de A sur CT .

Trouver les lieux de B' et C' et les enveloppes des droites BS et CT .

2. On note K la projection de Ω sur la droite BC .

Calculer le rapport $\frac{\Omega A}{\Omega K}$ en fonction de α et en déduire le lieu de Ω . Montrer que le cercle (Γ) reste tangent à un cercle fixe.