Baccalauréat C Clermont septembre 1973

EXERCICE 1

Soit a un nombre réel donné. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par ses deux premiers termes : $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1,\ U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}.$$

Soit (V_n) la suite définie par

$$V_n = U_{n+1} - U_n \quad (n \geqslant 0).$$

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; calculer V_n pour tout n, positif ou nul, en fonction de a et de n.
2. En déduire U_n en fonction de a et de n (on pourra considérer les n relations $V_p = U_{p+1} - U_p$ pour p compris entre 0 et $n-1$).
   Comment choisir a pour que la suite (U_n) soit convergente et quelle est alors sa limite ?

EXERCICE 2

Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\text{Log}\, x}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de f sur $]1~;~+\infty[$.
2. Soit a et b deux réels supérieurs à 1.
   Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\text{Log}\, x - 1}{(\text{Log}\, x)^2}\,\text{d}x$.
   Déduire des variations de f l'existence de couples $(a~;~b)$ vérifiant (pour $1 < a < b$)

$$\int_a^b \frac{1}{\text{Log}\, x}\,\text{d}x - \int_a^b \left(\frac{1}{\text{Log}\, x}\right)^2\,\text{d}x.$$

EXERCICE 3

Soit E un plan affine euclidien ; $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de E. Soit A le point défini par $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\jmath}$. On note O$x$ la droite contenant O et de vecteur directeur $\vec{\imath}$.
À tout nombre réel α on associe la droite (D_α) passant par A et telle que $\overline{(\text{O}x,~\text{D}_\alpha} = \alpha$ [c'est-à-dire que α est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{\text{O}x,~\text{D}_\alpha})$].

Les parties **A** et **B** suivantes sont indépendantes.

Partie A

1. Montrer que (D_α) a pour équation

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + \cos \alpha = 0.$$

2. Soit P_α le symétrique du point O par rapport droite (D_α).
On peut considérer P_α comme un point mobile en fonction de la variable temps α.
Déterminer la trajectoire (C) et calculer le vecteur vitesse de P_α.
Étudier la nature du mouvement de P_α.
Montrer que $\overrightarrow{u}(\alpha) = \overrightarrow{\imath}\cos 2\alpha + \overrightarrow{\jmath}\sin 2\alpha$ est un vecteur unitaire de la tangente (T) à la courbe (C) au point P_α associé à l'instant α.

3. La droite (T) précédente varie avec α. On considère sur (T) le point M dont la position à l'instant α est définie par $\overrightarrow{P_\alpha M} = f(\alpha)\overrightarrow{u}(\ddot{o}alpha)$, où f est une fonction réelle de la variable α, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la fonction f pour qu'à chaque instant α le vecteur vitesse du point M soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha)$ et qu'à l'instant $\alpha = 0$ le point M soit en A$'$ de coordonnées $(0\,;\,2)$.

Partie B

Pour tout réel α, on désigne par s_α la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D_α).

1. Montrer que pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ de $\mathbb{R}^2$, $s_\beta \circ s_\alpha$ est une rotation dont on indiquera le centre et une mesure de l'angle.
Trouver une relation entre les quatre nombres réels $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, nécessaire et suffisante, pour que l'on ait

$$s_\beta \circ s_\alpha = s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}.$$

2. On considère l'ensemble des droites $\left(D_{n\frac{\pi}{3}}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que cet ensemble de droites contient exactement trois éléments.
En donnant à α les valeurs 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et en considérant les symétries s_α associées, montrer que les trois produits

$$s_{\frac{\pi}{3}} \circ s_0 \quad s_{\frac{2\pi}{3}} \circ s_{\frac{\pi}{3}} \quad s_0 \circ s_{\frac{2\pi}{3}}$$

sont une même rotation r.

3. $\mathscr{A}$ désignant l'ensemble $\left\{e,\ r,\ r^{-1},\ s_0,\ s_{\frac{\pi}{3}},\ s_{\frac{2\pi}{3}}\right\}$ où e est l'application identique de E et r^{-1} la rotation réciproque de r, montrer que $(\mathscr{A},\ \circ)$ est un groupe dont on dressera la table.