Durée : 4 heures

Baccalauréat C Clermont juin 1969

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{6x2 - 4x + 5}{(2x-3)(x+1)}$$

1. Montrer qu'il existe trois nombres réels, A, B et C, tels que

$$\frac{6x^2 - 4x + 5}{(2x-3)(x+1)} = A + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{x+1}$$

pour tout x réel différent de -1 et de $\frac{3}{2}$.

2. Calculer la dérivée des fonctions Log $(x+1)$ et Log $(2x-3)$, où Log désigne le logarithme népérien.

3. En déduire

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(La mise du résultat sous forme décimale n'est pas demandée.)

EXERCICE 2

Résoudre

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$. On donne deux points fixes : A, de coordonnées $(a~;~0)$, $a \neq 0$, et B, de coordonnées $(a~;~b)$.

Soit I le milieu de OA, (Δ) la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$ et (D) la droite d'équation $x = a$.

On considère l'ensemble (E) des points du plan non situés sur (Δ). Soit T la transformation qui, au point M de coordonnées $(x~;~y)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ défini par les relations

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{ax}{2x-a}\\ y' & = & \dfrac{ay}{2x-a}\end{array}\right.$$

1. Démontrer que T réalise une application bijective et involutive de (E) sur lui-même. Rechercher les points invariants.

2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés. En supposant M non situé sur (D), démontrer que le coefficient directeur de la droite OB est la demi-somme des coefficients directeurs des droites BM et BM'. En déduire une construction simple de M', connaissant M.

3. Soit P le point d'intersection de MM' et (D).

Déterminer le birapport des quatre points M, M', O et P.

Quel est l'ensemble des points M pour lesquels l'angle MBM' est droit ?

4. **a.** Démontrer que la figure transformée par T du cercle (C_1) de diamètre OA est une hyperbole, dont on déterminera le centre, les sommets, les asymptotes et l'excentricité.

b. Quelle est la figure transformée du cercle (C_2) de diamètre IA ?

c. Démontrer que les figures transformées des cercles (C) centrés sur $x'\mathrm{O}x$ sont des coniques. [On désignera par d l'abscisse du centre et par R le rayon du cercle (C)].

d. Démontrer que l'ensemble des cercles centrés Sur $x'\mathrm{O}x$ dont les transformées sont des paraboles est un faisceau de cercles tangents en I.

Déterminer ceux des cercles de ce faisceau dont les transformées sont des paraboles de directrice $y'y$.

Démontrer que ces cercles sont vus de O sous un angle droit.