Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1974 Clermont-Ferrand ∽

EXERCICE 1

Soit dans un espace affine euclidien de dimension 2, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ le point M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient, en fonction du temps t, les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{Log}\,x & = & t + \text{Log}\,k\\ y & = & k\text{e}^{-t}\end{array}\right.$$

(k étant un nombre réel positif donné).

1. Calculer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M, à l'instant t.
2. Déterminer la trajectoire de M et faire une description du mouvement.

EXERCICE 2

Trouver l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient :

$$5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 \qquad (\text{mod } 1)3$$

$\left(\text{On pourra remarquer que } x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)\left(x^2+1\right)\right)$.

PROBLÈME

Dans un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on considère les deux applications affines f et g telles que :

- le transformé par f de tout point M de coordonnées $(x ; y)$ soit le point M', dont les coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcr}x' & = & x - y + 1\\ y' & = & -y + 2\end{array}\right.$$

- le transformé par g de tout point M de coordonnées $(x ; y)$ soit le point M'', dont les coordonnées $\left(x'' ; y''\right)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcr}x'' & = & x + y + 1\\ y'' & = & y + 2\end{array}\right.$$

On appelle Γ la parabole de foyer F(1 ; 0), dont la directrice D a pour équation : $x + 1 = 0$.

Partie A

1. Déterminer l'équation de la parabole Γ.
   Quelles sont les coordonnées des images par f et g de F ? Déterminer les équations des transformées par f et g de D et de Γ.
2. Soit J le point de coordonnées (0 ; 1). Pour tout point M, on pose :

$$M' = f(M) \quad \text{et} \quad M'' = g(M).$$

   Déterminer l'ensemble E des points M tels que l'une au moins des trois propriétés suivantes soit vérifiée :

$$\begin{array}{lcl} M' & = & \text{J} \\ M'' & = & \text{J} \\ M' & \neq & \text{J}, \quad M'' \neq \text{J et } \overrightarrow{\text{J}M'} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{\text{J}M''} \end{array}$$

Donner une représentation graphique de E relativement au repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Préciser en particulier les asymptotes.

3. Montrer que les applications f et g sont bijectives.
Déterminer pour chacune d'elles, lorsqu'il en existe : les points invariants, les droites globalement invariantes.

4. Montrer que f est une application involutive. En est-il de même pour g ? pour $g \circ f$? pour $f \circ g$?

Partie B

A est l'ensemble des applications affines du plan. Chaque application $g' \in A$ est définie par ses équations dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax + by + p \\ y' & = & cx + dy + q \end{array}\right.$$

(a, b, c, d, p, q étant des nombres réels ; $\left(x' ; y'\right)$ désignant les coordonnées de l'image par g' du point de coordonnées $(x ; y)$).

1. Quelles conditions doivent vérifier a, b, c, d, p, q pour qu'on ait simultanément :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g' \circ g(0) & = & g \circ g'(0) \\ g' \circ g(\text{F}) & = & g \circ g'(\text{F}) \\ g' \circ g(\text{J}) & = & g \circ g'(\text{J}) \end{array}\right.$$

On appelle A' l'ensemble des applications g' qui vérifient simultanément ces trois conditions.
Lorsque $g' \in A'$, que peut-on dire de $g' \circ g$ et $g \circ g'$?

2. On note A'' la partie de A' formée par les applications de A' qui transforment Γ en elle-même. Montrer que A'' muni de la loi habituelle de composition des applications est un groupe commutatif isomorphe au groupe additif des nombres réels.

3. Soit M_0 un point donné, de coordonnées $\left(x_0 ; y_0\right)$. On note I l'application affine identique du plan sur lui-même, (c'est-à-dire qui vérifie pour tout point M : I$(M) = M$).
On considère l'application g et on définit, pour tout entier naturel n, l'application g^n par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g^0 & = & \text{I} \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad g^n & = & g \circ g^{n-1} \end{array}\right.$$

On note M_n le transformé de M_0 par g^n, les coordonnées de M_n étant notées $\left(x_n ; y_n\right)$. Exprimer x_n et y_n en fonction de n, x_0, y_0.

Matériel autorisé :
— Toutes tables numériques et en particulier les tables de logarithmes (sans formulaires),
— Règles et cercles à calculs.
— Feuille(s) de papier millimétré à distribuer aux candidats : 0
Matériel interdit :
— Calculateurs électroniques de poche.