Durée : 4 heures

Baccalauréat C Clermont septembre 1969

EXERCICE 1

Log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier la fonction

$$y = \frac{x}{\operatorname{Log} x} + 2x.$$

2. Construire sa représentation graphique.
3. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs positives, de la droite joignant O au point d'abscisse x du graphique.

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps, $\mathbb{C}$, des complexes, l'équation

$$\mathrm{i}z^2 - 2z - 4 - 4\mathrm{i} = 0.$$

Mettre sous forme trigonométrique les deux racines trouvées.

PROBLÈME

Préambule : f et g désignant des transformations ponctuelles, f^{-1} désigne la transformation réciproque de f et $g \circ f$ la transformation produit de f par g, c'est-à-dire que, si $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M_1)$, on a $M_2 = g \circ f(M)$.
Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Une application f_k du plan P dans lui-même est définie ainsi :
à tout point M de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, f_k associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x' & = & (1+k)x + (1-k)y, \\ 2y' & = & (1-k)x + (1+k)y, \end{array}\right.$$

où k est un paramètre réel.

Partie A

1. Cette application est-elle bijective pour toute valeur de k ?
Définir la transformation réciproque f_k^{-1} de f_k ; comparer f_k^{-1} et $f_{\frac{1}{k}}$.
Étudier les points invariants de f_k. Discuter.
2. Donner les formules définissant $f_{k'} \circ f_k$. La loi $\circ$ de composition des applications est-elle une loi de composition interne dans l'ensemble E des fonctions f_k bijectives ?
Montrer que E, muni de cette loi, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe multiplicatif, $\mathbb{R}^{\star}$, des réels non nuls.

Partie B

Le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est maintenant supposé orthonormé et l'on donne à k la valeur 3.

1. Déterminer, par son équation, la transformée, $\mathcal{C}'$, par f_3, du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 1.

Démontrer que $\mathcal{C}'$ admet O pour centre de symétrie et les bissectrices des axes de coordonnées pour axes de symétrie.

Écrire l'équation de $\mathcal{C}'$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ déduit de $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Reconnaître $\mathcal{C}'$ et déterminer ses éléments ; en particulier, donner les coordonnées des foyers et les équations des directrices dans le repère initial $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Démontrer que, lorsque M n'est pas un point invariant, la droite, MM', joignant M à son image M', a une direction fixe. Évaluer HM', H étant l'intersection de MM' et de l'ensemble, D, des points invariants de f_3.

Reconnaître l'application f_3 et retrouver la nature de $\mathcal{C}'$.