Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1972

EXERCICE 1

On considère la fonction réelle g, de la variable réelle x, définie sur $[0\,;\,1]$, par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
g(x) & = & x^{\frac{3}{2}}\,\text{Log}\, x, \quad \text{si } x \in]0\,;\,1],\\
g(0) & = & 0.
\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur $[0\,;\,1]$. (On rappelle que $2\text{Log}\,\sqrt{x} = \text{Log}\, x$ pour $x > 0$.)
2. Étudier le sens de variations de g et tracer la courbe représentative en repère orthonormé.
   On précisera les demi-tangentes éventuelles aux points d'abscisses 0 et 1.
   On donne les valeurs approchées suivantes :

$$0,36 < \text{e}^{-1} < 0,37 \quad \text{et} \quad 0,51 < \text{e}^{-3} < 0,52.$$

EXERCICE 2

Un nombre de quatre chiffres s'écrit

$$N = \overline{x43y},$$

dans le système de numération dont la base est 7. Déterminer x et y de manière que ce nombre N soit divisible par 6.

PROBLÈME

Partie A

On considère la suite réelle définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$$

pour tout entier naturel n.

1. Montrer, par récurrence, qu'elle est à termes strictement positifs.
2. On pose

$$w_n = \frac{-1 + u_n}{1 + u_n}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

   Trouver une relation entre w_{n+1} et w_n. En déduire la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$, puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Au nombre complexe quelconque $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on associe le point m de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
On désigne par T' l'application de (P) $-\{\text{O}\}$ dans (P) qui au point m, associé à
$z = x + \text{i}y$, fait correspondre le point M associé à

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1. Montrer que T est surjective, mais non injective.

2. Montrer que si M' est le point associé à $\dfrac{1}{z}$, M est le milieu du segment $[mM']$.

3. Quels sont les points invariants par T ?

4. Trouver l'ensemble des points M :

 a. Lorsque m se déplace sur le cercle centré en O et dont le rayon est R.
 On étudiera avec soin le cas particulier du cercle dont le rayon est 1 et dont le centre est O.

 b. Lorsque m se déplace sur une droite (D) passant par O et privée de O.
 On étudiera avec soin les cas particuliers dans lesquels la droite (D) est l'axe $x'\text{O}x$, puis l'axe $y'\text{O}y$.