Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1974 Clermont-Ferrand ∾

EXERCICE 1

On lance un dé 10 fois de suite. Soit X_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) le numéro obtenu au i-ème lancer et S la somme des numéros obtenus.

1. Calculer espérance mathématique et l'écart-type des variables aléatoires X_i et S.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, donner un majorant de la probabilité d'avoir $|\mathrm{S} - 35| \geqslant 10$.

EXERCICE 2

Une suite de nombres réels (u_n) admet pour premier terme u_0 et est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + 3$$

1. Étudier le cas où $u_0 = 4$. (On calculera d'abord u_1 puis, pour $n > 1$, u_n).
2. On suppose $u_0 \neq 4$. Montrer qu'il existe une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u - v$ soit indépendant de n.
   Exprimer u_n en fonction de n et u_0.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini et calculer cette limite.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}_2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. α étant un nombre réel donné, on considère la fonction réelle f_a de la variable réelle t strictement positive, définie par :
   $$\forall t \in]0\,;\,+\infty[, \quad f_\alpha(t) = t^\alpha.$$
   On note C_α sa courbe représentative relativement au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   Pour quelles valeurs de α la fonction est-elle croissante ? décroissante ? Indiquer suivant les valeurs de α la nature des branches infinies de la courbe C_α. (On ne demande pas de représenter la courbe).
2. On note S_O la symétrie par rapport à la droite passant par O et parallèle à $vectu$ et S_1 la similitude de centre O de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont l'angle est déterminé par le nombre réel $\frac{\pi}{4}$ et on pose $T = S_1 \circ S_\mathrm{O}$.
   $(x\,;\ y)$ étant les coordonnées d'un point quelconque M du plan, $\left(x'\,;\ y'\right)$ celles de $T(M)$, calculer x' et y' en fonction de x et y.
   Lorsque M est le point d'absisse t de la courbe C_α déterminer en fonction de t les coordonnées $(a(t)\,;\ b(t))$ de $T(M)$.

3. E_2 est l'espace vectoriel euclidien associé à $\mathscr{E}_2$. Pour tout nombre réel strictement positif t, on désigne par $\psi(t)$ l'endomorphisme de E_2 défini par sa matrice :

$$\begin{pmatrix} a(t) & b(t)\\ b(t) & a(t)\end{pmatrix}$$

relativement à la base $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$.

a. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{w}$ de E_2 tels que $\overrightarrow{w}$ et $\psi_t\left(\overrightarrow{w}\right)$ soient linéairement dépendants et en déduire qu'il existe toujours deux droites vectorielles $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ globalement invariantes par ψ_t.

b. Soit $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs unitaires de $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ respectivement. (On les choisira tels que leur première coordonnée dans $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$ soit positive).

Écrire la matrice de ψ_t dans la base $\left(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'}\right)$.

4. F_α désignant l'ensemble des endomorphismes ψ_t lorsque t décrit $]0\ ;\ +\infty[$, montrer que F_α a une structure de groupe commutatif pour la composition des applications. Quelle particularité présente le groupe F_1 ?

Nota : *L'ordre dans lequel les droites visées au 3. seront appelées $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ est indifférent.*