

♣ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Dans le plan complexe, soit m le point d'affixe z et m' le point d'affixe z' , tels que

$$z + z' = 4.$$

Montrer que m' est l'image de m par la symétrie, \mathcal{S} , de centre I et d'affixe 2.

Soit \mathcal{R} la rotation de centre O, d'affixe 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est une rotation, dont on précisera le centre en en donnant l'affixe et l'angle.

EXERCICE 2

On considère le mouvement rectiligne défini par

$$x(t) = \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t.$$

1. Montrer que l'on peut écrire $x(t)$ sous la forme $a \cos(\omega t + \varphi)$, où a , ω et φ sont des nombres indépendants de t . Déterminer a , ω et φ ; on prendra φ tel que

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

2. Déterminer la période du mouvement. Préciser, à l'intérieur d'une période, les instants et les abscisses où la vitesse diminue, les instants et les abscisses où elle augmente.

PROBLÈME

Soit f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f_a(x) = \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos a + 1},$$

où a est un paramètre réel tel que $0 < a < \pi$.

1. Étudier la fonction $f_{\frac{\pi}{3}}$.

Tracer la courbe représentative $(C_{\frac{\pi}{3}})$ de cette fonction dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ et tel que $\|\vec{j}\| = 2\|\vec{i}\|$ (on pourra prendre \vec{i} de longueur 1 cm).

2. Montrer que, quel que soit a et quel que soit x , on a les inégalités

$$f_a(x) + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad -f_a(x) + 1 \geq 0.$$

En déduire que, quel que soit a , les valeurs de la fonction f_a sont comprises entre -1 et $+1$.

Ces valeurs extrêmes sont-elles atteintes? Si oui, pour quelles valeurs de x ? Que peut-on en conclure, concernant l'intersection des courbes (C_a) ?

3. Étudier la fonction f_a En donner le tableau des variations. On ne demande pas d'en construire la courbe représentative (C_a) . On pourra, en quelques mots, comparer son allure à celle de la courbe $(C_{\frac{\pi}{3}})$.

4. a. On désigne par (D_a) la tangente à (C_a) en son point d'intersection B_a avec Oy .
Montrer que (D_a) rencontre (C_a) en un point M_a distinct du point B_a . Déterminer, en fonction de a , les coordonnées du point M_a .
Déterminer l'ensemble parcouru par le point M_a , lorsque a varie sur l'intervalle $]0; \pi[$, et en dessiner la représentation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du 1.?
- b. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels il passe une seule droite (D_a)
En dessiner la représentation dans un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) .