Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C juin 1975 Clermont-Ferrand [1] ∾

EXERCICE 1

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathbb{C}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; on le notera $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

1. Soit f un élément de $\mathscr{C}$; on considère l'application, notée φ,

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. L'application φ a-t-elle une dérivée seconde pour $x = 0$?

2. On considère l'application, notée θ,

$$\begin{array}{cccc} \theta : & \mathscr{C} & \to & \mathscr{C} \\ & f & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

Montrer que θ est une application linéaire de $(\mathscr{C}, +, .)$ dans lui-même.
Déterminer le noyau de θ.

3. Dans le cas où :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2^{-x} \end{array}$$

déterminer l'application φ.

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien P, on considère le triangle équilatéral ABC tel que

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right\| = a;$$

a étant un nombre réel strictement positif.

1. Déterminer le point G, barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients 2, 1 et 1.
Préciser sur une figure la position du point G.
2. On considère l'application f de P dans P qui, au point M, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}.$$

Préciser la nature de l'application f et les éléments qui la caractérisent.

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M de P vérifiant :

$$2\overrightarrow{M\mathrm{A}}^2 + \overrightarrow{M\mathrm{B}}^2 + \overrightarrow{M\mathrm{C}}^2 = 2a^2$$

(On pourra remarquer que A est un élément de Γ).

1. Grenoble

4. Déterminer l'ensemble Δ des points M de P vérifiant :

$$\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 = 2a^2.$$

(On pourra remarquer que A est un élément de Δ).

PROBLÈME

Les parties A, B et C du problème sont dans une large mesure indépendantes.
Dans tout le problème, on désignera par P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

Partie A

Soit a un nombre réel quelconque et f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-2)} + 1.$$

On désignera par C_a sa courbe représentative relativement au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. Étudier, en discutant suivant les valeurs de a, les variations de la fonction f_a (dresser les tableaux de variations).
   Montrer que les courbes C_a ont en commun un point A et une asymptote Δ.
   Tracer sur une même figure les courbes C_1 et C_{-1} représentatives des fonctions f_1 et f_{-1}.
2. Préciser dans chacun des deux cas suivants la relation que doivent vérifier les nombres a et a' pour que les courbes C_a et $C_{a'}$:
   — aient au point A des tangentes orthogonales
   — soient symétriques par rapport à la droite d'équation $x - 2 = 0$
3. Soit λ un nombre réel positif. Calculer en fonction de λ l'aire du domaine plan défini par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2-\lambda & \leqslant & x & \leqslant & 2+\lambda \\ 1 & \leqslant & y & \leqslant & \inf\left\{f^{-1}(x),~f_1(x)\right\}\end{array}\right.$$

   où $\inf\left\{f^{-1}(x),~f_1(x)\right\}$ désigne le plus petit des deux nombres $f_{-1}(x)$ et $f_1(x)$.
   Cette aire a-t-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

Partie B

On envisage l'application ponctuelle de P dans P qui, à tout point m de coordonnées $(x~,~y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ fait correspondre le point $M(X~;~Y)$ défini par les relations :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} X & = & x+2 \\ Y & = & \mathrm{e}^y + 1\end{array}\right.$$

1. Cette application est-elle injective ?
   Quel est l'ensemble image de P par cette application, ensemble que l'on notera P_1 ?
   Montrer que l'application g de P dans Pl définie par les relations (1) est une bijection ; donner l'expression analytique de l'application réciproque g^{-1}.
2. Quelle est l'image par g de la droite $\left(\mathrm{O},~\vec{u}\right)$?
   Quelle est l'image D_a par g^{-1} de la courbe C_a ?
   Tracer D_1 et D_{-1} dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

3. Soit H la courbe d'équation : $y = 2 + \sqrt{x}$.
On désigne par Γ l'image de H par g^{-1}. Quelle est l'équation de Γ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$?
Tracer la courbe Γ en précisant ses particularités.

Partie C

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. On définit la suite (z_n) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}z_0 & = & k(1+\text{i})\\ z_n & = & \left(-\dfrac{1}{2}\right)\overline{z_{n-1}}\end{array}\right. \qquad (k \text{ nombre réel non nul})$$

Soit m_n le point du plan P d'affixe z_n relativement au repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. Calculer z_n en fonction de z_0 et de n.
Quelle est la limite du module de z_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Exprimer les coordonnées $\left(x_n~;~y_n\right)$ du point m_n en fonction de k et de n.
Montrer que tous les points m_n appartiennent à la réunion de deux droites fixes que l'on précisera.
Dans quelle application indépendante de n le point m_{n+1} est-il l'image de m_{n-1} ? Le point m_n a-t-il une position limite quand n tend vers $+\infty$?

3. On pose $M_n = g\left(m_n\right)$.

4. Exprimer les coordonnées $(X_n~;~Y_n)$ de M_n en fonction de k et de n.

5. Montrer que tous les points M_n appartiennent à la réunion de deux courbes fixes que l'on précisera.