∽ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient la relation

$$8m = 105d + 30$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soit f' la fonction dérivée de f. On suppose que

$$-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

On désigne par g et h les fonctions définies par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} f(x) \quad \text{et } h(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

1. Montrer que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs dérivées.
2. Montrer que g est une fonction croissante et que h est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, si $f(0)$ est nul, alors $f(x)$ est nul pour tout nombre réel x.

PROBLÈME **12 POINTS**

Pour tout nombre complexe z, on désigne par $\overline{z}$ le conjugué de z ,et par $|z|$ le module de z.
On rappelle que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que $(1,\ \mathrm{i})$ en est une base.
On désignera par L l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$et par E l'ensemble $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de tous les couples $(s\,;\,t)$ de nombres complexes.

1. Pour tout couple $(s\,;\,t)$ de E, on désignera par $f_{(s,\ t)}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z fait correspondre $s \cdot z + t \cdot \overline{z}$.
   a. Montrer que $f_{(s,\ t)}$ appartient à L, pour tout couple $(s\,;\,t)$ de E.
   b. Réciproquement, si g est un élément de L, montrer qu'il existe un couple unique $(s\,;\,t)$ de E pour lequel on a $g = f_{(s,\ t)}$.
   Calculer s et t en fonction de $g(1)$ et $g(\mathrm{i})$. On dira alors que $(s\,;\,t)$ représente g.
   c. Pour s, t, u et v éléments de $\mathbb{C}$, l'application composée $f_{(u,\ v)} \circ f_{(s\,;\,t)}$ appartient à L . Il existe donc un couple unique $(p\,;\,q)$ qui la représente. Calculer p et q en fonction de s, t, u et v.
   d. Déterminer tous les couples $(s\,;\,t)$ pour lesquels l'application $f_{(s,\ t)}$ est involutive.
   e. Montrer que l'application $f_{(s,\ t)}$ est bijective si et seulement si $|s| \neq |t|$.
   f. Lorsque l'application $f_{(s,\ t)}$ est bijective, on sait que son application réciproque appartient à L. Il existe donc un couple unique $(x\,;\,y)$ qui représente cette application réciproque. Calculer x et y en fonction de s et t.
2. Pour tout couple $(s\,;\,t)$ de E, on désignera par $V(s\,;\,t)$ l'ensemble des nombres *complexes* λ pour lesquels il existe au moins un nombre complexe z non nul tel que

$$s \cdot z + t \cdot \overline{z} = \lambda \cdot z.$$

a. Déterminer tous les couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels 0 appartient à $V(s\,;\ t)$.

b. Pour tout couple $(s\,;\ t)$, montrer que λ appartient à $V(s\,;\ t)$ si et seulement si 0 appartient à $V(s-\lambda,\ t)$.

c. Afin d'étudier les ensembles $V(s\,;\ t)$, on se donne un plan affine euclidien P et un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ de ce plan. À tout nombre complexe $z = a + b\text{i}$ (où a et b sont réels) on fait correspondre le point-image M dans P défini par $\overrightarrow{\text{O}M_z} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

À chacun des ensembles $V(s\,;\ t)$, on fait correspondre son image $C(s\,;\ t)$ dans P. Autrement dit, $C(s\,;\ t)$ est l'ensemble des points-images M_λ pour λ élément de $V(s\,;\ t)$.

Représenter sur une figure les ensembles $C(s\,;\ t)$ Correspondant à chacun des trois cas suivants :

1. $s = 1 + \text{i}$ et $t = \text{i}$
2. $s = 1 + 2\text{i}$ et $t = \text{i}$
3. $s = 1 + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et $t = \text{i}$

d. Pour un couple $(s\,;\ t)$ quelconque de E, quelle est la nature géométrique de l'ensemble $C(s\,;\ t)$?

e. Pour chaque couple $(s\,;\ t)$ de E, montrer qu'il y a au plus deux nombres *réels* dans l'ensemble $V(s\,;\ t)$.

f. Déterminer l'ensemble des couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels il n'y a qu'un seul nombre réel dans $V(s\,;\ t)$.

g. Déterminer l'ensemble des couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels il y a deux nombres réels distincts dans $V(s\,;\ t)$.

3. Pour tout couple $(x\,;\ y)$ de E, on posera

$$x \star y = \frac{1}{2\text{i}}\left(\overline{x}\cdot y - x\cdot\overline{y}\right)$$

C'est un nombre réel qui est la partie imaginaire du produit $\overline{x}\cdot.y$.

Pour tout élément g de L, on posera

$$\Delta(g) = g(1) \star g(\text{i})$$

a. Calculer $\Delta(f_{(s,\ t)}$ en fonction de s et t.

b. Montrer que, pour tout couple $(x\,;\ y)$ de E et pour g appartenant à L, on a

$$g(x) \star g(y) = \Delta(g)\cdot(x \star y).$$

(On pourra le montrer en mettant g sous la forme $g = f_{(s,\ t)}$).

c. Montrer que, pour g et h éléments de L, on a

$$\delta(g \circ h) = \Delta(g)\cdot\Delta(h).$$

d. Pour g élément de L, montrer que g est injective si et seulement si $\Delta(g)$ est non nul.

e. Lorsque $V(s\,;\ t)$ contient deux nombres réels distincts α et β, montrer qu'on a

$$\Delta\left(f_{(s,\ t)}\right) = \alpha\cdot\beta.$$

Que peut-on dire lorsque $V(s\,;\ t)$ ne contient qu'un seul nombre réel γ ?