

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C juin 1982 Clermont-Ferrand œ

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(1) \quad 5x - 4y = 2.$$

2. On considère les couples (a, b) solutions de l'équation (1).
- Quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun de a et b ?
 - Montrer qu'il existe un seul couple (a, b) dont le plus petit multiple commun de a et b est 60 et le plus grand diviseur commun de a et b est 2.

EXERCICE 2

On considère les intégrales définies

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx, \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx.$$

- Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n .
- Calculer I_1 . En déduire I_3 et I_5 .
- a. Soit f l'application qui à $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$ associe

$$f(x) = \text{Log} \left[\text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ par

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

- En déduire I_0 puis I_2 et I_4 .

PROBLÈME

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit E l'espace vectoriel associé de base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

On considère l'endomorphisme φ de E défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \\ \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}. \end{cases}$$

- Soit \vec{u} un vecteur quelconque de E de composantes (x, y, z) relativement à la base \mathcal{B} . Déterminer les composantes (X, Y, Z) de $\varphi(\vec{u})$ relativement à cette même base.

2. Déterminer le noyau D de φ . En donner une base.
3. Montrer que l'image de φ est le plan vectoriel P orthogonal à D.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ .
5. Montrer que l'endomorphisme φ peut être mis sous la forme

$$\varphi = \psi \circ p$$

où ψ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ et p une projection vectorielle à déterminer.

Partie B

Soit A le point de \mathcal{E} dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont (0, 1, 1). Soit f l'application affine de \mathcal{E} associée à l'endomorphisme φ et laissant A invariant.

Au point m de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} , correspond le point $M = f(m)$ de coordonnées (X, Y, Z) dans ce même repère.

1. Montrer que 1 est définie analytiquement par

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{2}[x + y - 1] \\ Y &= \frac{1}{2}[x + y + 1] \\ Z &= -z + 2 \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et l'image de \mathcal{E} par f . Donner les équations cartésiennes dans \mathcal{R} de ces ensembles.
3. Montrer que le repère $\mathcal{R}' \left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{k} \right)$ est un repère orthonormé du plan \mathcal{P} d'équation dans \mathcal{R}

$$x - y + 1 = 0.$$

4. Déterminer, dans ce repère \mathcal{R}' , l'expression analytique de la restriction \hat{f} de f à \mathcal{P} . Quelle est la nature de \hat{f} .
5. Soit $m \in \mathcal{E}$ et $M = f(m)$ son transformé par f . Indiquer par quelles transformations géométriques on passe du point m au point M . (On pourra illustrer la réponse à l'aide d'une figure.)

Partie C

On considère le point mobile $m(t)$ dont les coordonnées à la date t sont définies, relativement au repère \mathcal{R} de \mathcal{E} , par

$$\begin{cases} x(t) &= 1 + \cos t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= 1 + \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi[$$

1. Quelle est la nature de la trajectoire de $m(t)$?
Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point $m(t)$ à la date t .
Quelle est la nature du mouvement?

2. Soit $M(t)$ le transformé de $m(t)$ par f .
- Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire (Γ) de $M(t)$, relativement au repère \mathcal{R} . Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ du point $M(t)$ à la date t .
 - Étudier les variations de l'application :

$$t \in [0 ; 2\pi[\mapsto \left\| \overrightarrow{V}(t) \right\|$$

et tracer la courbe représentative.

- Trouver les positions de $M(t)$ pour lesquelles $\left\| \overrightarrow{V}(t) \right\|$ est maximal, minimal.
3. Montrer que (Γ) est globalement invariante par f .
4. Montrer que la trajectoire (Γ) est située dans le plan \mathcal{P} et trouver son équation cartésienne dans le repère \mathcal{R}' . Préciser la nature et les éléments géométriques de (Γ) .