Baccalauréat C Clermont-Ferrand[1] septembre 1979

Matériel autorisé :

— Toutes tables numériques et en particulier les tables de logarithmes (sans formulaires)

— Règles et cercles à calculs

— Feuille(s) de papier millimétré à distribuer aux candidats.

Matériel interdit :

— Calculateurs électroniques de poche

EXERCICE 1 **5 POINTS**

On considère l'équation

$$z^3 + (\mathrm{i} - 2)z^2 + 3(1 - \mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 2 = 0$$

où l'inconnue z est un nombre complexe.

1. Démontrer que cette équation admet une solution réelle z_1 que l'on calculera.
2. Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de cette équation.
3. Déterminer un nombre complexe a tel que les trois nombres $z_{l1} - a$, $z_2 - a$ et $z_3 - a$ aient même module.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-2~;~0]$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. On désigne par F la primitive de f sur $[-2~;~0]$ qui s'annule en 0. Justifier l'existence de F et déterminer F. (On pourra se servir de la formule d'intégration par parties.)
2. Démontrer que F est une bijection de $[-2~;~0]$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
3. On désigne par G l'application réciproque de F. Montrer que G est définie sur I et admet une dérivée G' sur I $-\{0\}$.

PROBLÈME **11 POINTS**

On désignera par E l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de nombres réels et par F l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ des couples d'entiers relatifs.

On considère l'application f de E dans E qui au couple $(x~;~y)$ fait correspondre le couple $(X~;~Y)$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& 3x + 4y \\ Y &=& 2x + 3y \end{array}\right.$$

Partie A

1. Montrer que l'application f est bijective et déterminer son application réciproque.
2. Montrer que l'image de F par f est égale à F.

1. Grenoble

3. Soit H l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de E pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Montrer que l'image de H par f est égale à H.
4. Soit S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de F pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Montrer que l'image de S par f est égale à S.
5. On pose $s_0 = (1\ ;\ 1)$ et, par récurrence, $s_{n+1} = f(s_n)$, pour tout entier naturel n. Montrer que s_n appartient à S, pour tout entier naturel n.
6. On désigne par x_n et y_n les entiers définis par $s_n = (x_n\ ;\ y_n)$. Calculer x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3.
7. Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Partie B

On considère la fonction numérique, h définie pour tout nombre réel t, par

$$h(t) = 3t + 4\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}.$$

1. Montrer que la fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $h(-1) = x_0$ et $h(x_n) = x_{n+1}$ pour tout entier naturel n ; [les x_n ont été définis au A 6.].
3. Montrer qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de S pour lequel $-1 < x < 1$.
4. En déduire qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de S pour lequel $x_0 < x < x_1$.
   Plus généralement, montrer qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de S pour lequel $x_n < x < x_{n+1}$.
5. Déduire des questions A 7. et B 4. que S est l'ensemble de tous les couples

   $$\left(x_n\ ;\ y_n\right),\quad \left(x_n\ ;\ -y_n\right),\quad \left(-x_n\ ;\ y_n\right),\quad \left(-x_n\ ;\ -y_n\right)$$

   pour n entier naturel.