Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1976

EXERCICE 1

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$).
On considère qu'à chaque naissance, l'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{G\ ;\ F\}$.
G étant l'événement « avoir un garçon »
F étant l'événement « avoir une fille »,
ces deux événements étant équiprobables.
On considère que les naissances sont indépendantes les unes des autres.
Pour la i-ème naissance, on construit la variable aléatoire réelle

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{X}_i : & \Omega & \to & [0\ ;\ 1] \\ & G & \longmapsto & 1 \\ & F & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Soit $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n$

1. Dans cette question, $n = 3$.
   a. Déterminer la probabilité que, parmi ses 3 enfants, le couple ait exactement 3 garçons.
   Même question avec :
   — exactement 2 garçons,
   — exactement 1 garçon,
   — exactement 0 garçon.
   b. Construire la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.
2. Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\dfrac{1}{100}$.

EXERCICE 2

À chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$.

1. Déterminer l'ensemble D des points M de P, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, tels que

$$|z - 1| = |z - (1 + \sqrt{3}) + \mathrm{i}|$$

   Représenter graphiquement D.
2. Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -\mathrm{i}z + (3 - \mathrm{i}).$$

   Déterminer géométriquement f.
   Déterminer l'ensemble D', image de D par f. Représenter graphiquement D'.

PROBLÈME

Partie A

Soit λ un nombre réel fixé, non nul.
Soit μ un nombre réel fixé, non nul.
Pour chaque couple $(a\,;\,b)$ de $\mathbb{R}^2$, on définit la fonction $f_{a,\,b}$ par :

$$f_{a,\,b} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{a,\,b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(a\cos\mu x + b\sin\mu x). \end{array}$$

Soit $E = \left\{f_{a,\,b} ; (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. a. Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si l'on note $+$ l'addition des fonctions, et $\bullet$ la multiplication d'une fonction par un nombre réel, on sait que $(F, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $(E, +, \bullet)$ en est un sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ est une base $\mathcal{B}$ de E.

2. a. Démontrer que $f_{a,\,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée $f'_{a,\,b}$ appartient à E.

Démontrer que l'application D définie sur E par $D\left(f_{a,\,b}\right) = f'_{a,\,b}$ est un endomorphisme de E.

b. Déterminer la matrice M de D dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que D est un isomorphisme de E. Déterminer la matrice M^{-1} de D^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ (on note D^{-1} l'application réciproque de D).

3. a. Si l'on pose $F = D^{-1}\left(f_{a,\,b}\right)$, montrer que F est une primitive de $f_{a,\,b}$.

b. En déduire une primitive de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}e\left(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x\right) \end{array}$$

c. Soit C la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre. L'unité d'aire étant le centimètre carré, déterminer l'aire géométrique S de la partie du plan comprise entre la courbe C et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $y = 0$, c'est-à-dire de la partie formée des points dont les coordonnées x, y vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leqslant & x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ |y| & \leqslant & |f(x)| \quad \text{et } y \bullet f(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$$

On tracera succinctement l'arc de C obtenu pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

Cette partie est indépendante de la question (A, 2., b.).
Soit deux nombres réels strictement positifs fixés α et β. On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left(f_{a,\,b},\ f_{a',\,b'}\right) & \longmapsto & \alpha aa' + \beta bb'. \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Pour quelles valeurs de α et β, $\mathcal{B}$ est-elle une base orthonormée de E muni de φ.

Dans la suite, on choisit ces valeurs pour α et β et on oriente E de façon que $\mathcal{B}$ en soit une base directe.

2. On fixe maintenant $\lambda = \mu = 1$.

a. Démontrer que D est le produit d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle. On déterminera ces deux applications linéaires.

b. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E et rapporté à un repère $(\mathrm{O},\ \mathscr{B})$. Soit d l'application affine dont l'application linéaire associée est D, et qui transforme $\mathrm{A}(1\,;\,2)$ en $\mathrm{A}'(1\,;\,0)$.

Quelle est la nature de d ? Déterminer analytiquement d. Donner les éléments caractéristiques de d.