∽ Baccalauréat Clermont juin 1948 ∾
série mathématiques et mathématiques et technique

Exercice 1 (au choix)

1er sujet

En supposant que la fonction $u(x)$ de la variable indépendante x soit définie, non nulle, positive dans l'intervalle $(a,\ b)$ et admette dans cet intervalle une dérivée $u'(x)$, montrer que la fonction de x, $y = \sqrt{u(x)}$, admet une dérivée par rapport à x dans le même intervalle et calculer cette dérivée.
On pourra soit traiter la question telle qu'elle est posée ci-dessus, soit raisonner en prenant pour u une fonction déterminée, par exemple $\cos x$ dans l'intervalle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ ou toute autre au choix du candidat.

2e sujet

Résoudre avec l'aide des tables de logarithmes à cinq décimales l'équation

$$1,6\cos x + 0,4\sin x = 1.$$

On donnera les valeurs des solutions à un décigrade près par défaut.

3e sujet

Après avoir donné une définition des asymptotes de l'hyperbole, on en énoncera et l'on en démontrera, à partir de la définition choisie, les principales propriétés.

Exercice 2

Soient dans un plan : une droite fixe (D), un point A fixe sur (D), un point fixe B non situé sur (D) et tel que AB ne soit pas perpendiculaire à (D).
On désignera par I le milieu de AB, par (I$'$) la médiatrice, de AB, par J la projection orthogonale de B sur D et par α la détermination comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$ de l'angle de droites (AB, D).
Un cercle variable (O), de centre O, passe constamment par les points fixes A et B. Il recoupe (D) en un second, point M variable, On désignera par (T) la tangente en M à ce cercle.

1. On projette orthogonalement B en u sur OM, en u' sur (T). Montrer qu'il existe, lorsque O varie, une similitude (S) (le centre B qui transforme constamment O en M.
   Calculer l'angle et le rapport de cette similitude en fonction de l'angle α.
   Montrer que O et u, O et u', u et u' sont respectivement couples homologues dans des similitudes (S_1), (S_2), (S_3) dont on déterminera aussi les angles et les rapports en fonction de α.
2. **a.** Quel est le lieu Δ de u ? Pour le placer sur la figure, on cherchera ses points d'intersection avec AB et (D).
   Quelle est l'enveloppe (U) de OM ? Construire le point de contact de OM et de (U).
   b. Quel est le lieu Δ', de u' ? En quel point Δ' coupe-t-elle (D) ? Quel est l'angle de Δ et Δ' ?
   Quelle est l'enveloppe (U$'$) de T ?
   c. Montrer que (U$'$) est tangente à (D) et trouver le point de contact.
   Montrer que (U) est tangente à (U$'$) en un point K et à (D) en un point A$'$.
   Préciser la position de K et de A$'$.
   Montrer en outre que (U$'$) est tangente à la perpendiculaire en A$'$ à (D) et que (U) est tangente à la perpendiculaire en A$'$ à (D) ; on précisera la position des points de contact.

3. On considère deux cercles (O′) et (O″) de la famille ; les droites (T) correspondantes : (T’) tangente, à (O′) en M′ et (T′) tangente à (O′) en M′, se coupent en un point P.
   - **a.** Montrer que le cercle circonscrit au triangle PM′M″ passe par B.
   - **b.** Quel est le lieu (H) du centre ω de ce cercle lorsque les deux cercles (O′) et (O″) varient de manière que leur angle reste constant ? Préciser les éléments de ce lieu.

N. B. - Les candidats sont invités à construire autant de figures partielles qu'ils le jugeront nécessaire, en ne faisant figurer sur chacune d'elles que les éléments utiles aux raisonnements en cours. Ils devront respecter les notations de l'énoncé.
Un candidat qui n'aurait pu établir dans **1.** l'existence des similitudes pourra admettre cette existence pour traiter **2.** et **3.** Ces deux dernières parties sont d'ailleurs indépendantes l'une de l'autre.
La question de cours est notée sur 10, le problème sur 20.