Baccalauréat Clermont 1950

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1er sujet. Montrer que la suite des nombres premiers est illimitée.

2e sujet. - Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction donnée soit égale à une fraction décimale.

3e sujet. - Montrer que le carré d'une fraction non réductible à un entier n'est jamais égal à un nombre entier.

II

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un point fixe A sur ce cercle.
Une droite variable (Δ) coupe le cercle (C) en M et N.
Les droites AM et AN coupent respectivement en M′ et N′ la droite perpendiculaire en O à AO.

1. Montrer que les quatre points M, N, M′ et N′ sont sur un même cercle (Γ) qui, lorsque (Δ) varie, reste orthogonal au cercle de centre A et de rayon $R\sqrt{2}$.
2. Déterminer l'axe radical de deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) correspondant à deux positions (Δ_1) et (Δ_2) de la droite (Δ).
3. On appelle I le centre du cercle (Γ). Montrer que si B est un point quelconque de (Δ), la différence $\overline{IA}^2 - \overline{IB}^2$ s'exprime simplement en fonction de R et de OB, de sorte que, si la droite (Δ) passe par un point fixe F, la différence

$$\overline{IA}^2 - \overline{IF}^2$$

reste constante. En déduire que, lorsque (Δ) varie en passant par F, le point I reste sur une droite fixe (D) [1].
Pouvait-on obtenir ce dernier résultat en s'appuyant sur le résultat de 2., sans passer par le calcul de $\overline{IA}^2 - \overline{IF}^2$?
Montrer que (D) est la polaire par rapport à (C) du point F′ déduit de F par la translation qui amène A en O. [On pourra calculer la distance de O à (D).]
4. Montrer que I a pour polaire par rapport à (C) la droite (Δ') déduite de (Δ) par la translation qui amène A en O.

1. On ne cherchera pas à déterminer si I peut occuper n'importe quelle position sur la droite (D)