∽ Baccalauréat C Clermont juin 1966 ∾
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Calculer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation

$$z^4 = \mathrm{i}.$$

Construire les images de ces solutions.
Calculer la somme et le produit de ces quatre solutions.

EXERCICE 2

Un plan est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $x'\mathrm{O}x, y'\mathrm{O}y$.
Au point M de ce plan qui a pour coordonnées x et y, on associe le point M′ de coordonnées x' et y' définies par les relations

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y'(x-a) &=& y\left(x'-a\right), \\ x+x' &=& 0, \end{array}\right.$$

où a désigne une constante positive donnée.

1. Montrer que les relations (1) associent à tout point M du plan un point M′ unique, sauf si l'on prend M sur une droite, dont on déterminera l'équation.
   Dans toute la suite du problème on suppose que M n'appartient pas à cette droite.
   On désigne par T la transformation qui au point M fait correspondre le point M′.
   Déterminer l'ensemble des points doubles de la transformation T.
   Montrer que T est involutive.
   Prouver que la droite MM′ passe par le point fixe A(a ; 0).
   En déduire une construction géométrique simple du point M′ lorsque le point M est donné.
2. Trouver l'équation de la transformée $\left(\Delta'\right)$, par la transformation T, de la droite (Δ) qui a pour équation

   $$y = mx + p,$$

   où m et p désignent deux constantes réelles données.
   Construire $\left(\Delta'\right)$ en supposant que $m = p = 1$ et que $a = 4$.
3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction

   $$y = (a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

   En déduire le tracé de la courbe (Γ), transformée par T du cercle (C) dont le centre est O et dont le rayon est a.
4. On prend pour nouvelle origine le point O′ $(-a\,;\,0)$ et, pour nouveaux axes, des axes $X'\mathrm{O}'X$, $Y'\mathrm{O}'Y$ passant par O′ et respectivement de même direction et de même sens que les axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$.
   Déterminer, dans ce nouveau système d'axes, l'équation de (Γ).
   Calculer le volume du solide limité par la surface engendrée par la rotation de la courbe (Γ) autour de l'axe $\overrightarrow{X'\mathrm{O}'X}$ et par les plans perpendiculaires à $\overrightarrow{X'\mathrm{O}'X}$ aux points d'abscisses $X = a$ et $X = 2a$ de cet axe.

5. Soit M un point du cercle (C). On pose

$$t = \left(\overrightarrow{\mathrm{OO}'},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \pmod{2\pi}.$$

Trouver en fonction de t les coordonnées dans $\overrightarrow{X'\mathrm{O}'X}$, $\overrightarrow{Y'\mathrm{O}'Y}$ du point M et du point M$'$ transformé de M par la transformation T. [M$'$ appartient évidemment à (Γ).]

On appelle A le point dont les coordonnées sont $(a\,;\ 0)$ dans le système d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.

Trouver l'équation qui donne les valeurs de t pour lesquelles le point M$'$ appartient à la droite D_α issue du point A et dont la pente est $m = \operatorname{tg}\alpha$.($\alpha$ étant un angle donné, différent de 0 et compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$).

En déduire que D_α coupe (Γ) en un seul point, M'_α, autre que A.

Exprimer en fonction de α la valeur de t correspondante et les coordonnées de M'_α.