

∞ Baccalauréat C Clermont juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Calculer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation

$$z^4 = i.$$

Construire les images de ces solutions.

Calculer la somme et le produit de ces quatre solutions.

EXERCICE 2

Un plan est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $x'Ox, y'Oy$.

Au point M de ce plan qui a pour coordonnées x et y , on associe le point M' de coordonnées x' et y' définies par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x-a) &= y(x'-a), \\ x+x' &= 0, \end{cases}$$

où a désigne une constante positive donnée.

1. Montrer que les relations (1) associent à tout point M du plan un point M' unique, sauf si l'on prend M sur une droite, dont on déterminera l'équation.

Dans toute la suite du problème on suppose que M n'appartient pas à cette droite.

On désigne par T la transformation qui au point M fait correspondre le point M'.

Déterminer l'ensemble des points doubles de la transformation T.

Montrer que T est involutive.

Prouver que la droite MM' passe par le point fixe A(a ; 0).

En déduire une construction géométrique simple du point M' lorsque le point M est donné.

2. Trouver l'équation de la transformée (Δ'), par la transformation T, de la droite (Δ) qui a pour équation

$$y = mx + p,$$

où m et p désignent deux constantes réelles données.

Construire (Δ') en supposant que $m = p = 1$ et que $a = 4$.

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction

$$y = (a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

En déduire le tracé de la courbe (Γ), transformée par T du cercle (C) dont le centre est O et dont le rayon est a .

4. On prend pour nouvelle origine le point $O'(-a; 0)$ et, pour nouveaux axes, des axes $X'O'X$, $Y'O'Y$ passant par O' et respectivement de même direction et de même sens que les axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Déterminer, dans ce nouveau système d'axes, l'équation de (Γ) .

Calculer le volume du solide limité par la surface engendrée par la rotation de la courbe (Γ) autour de l'axe $\overrightarrow{X'O'X}$ et par les plans perpendiculaires à $\overrightarrow{X'O'X}$ aux points d'abscisses $X = a$ et $X = 2a$ de cet axe.

5. Soit M un point du cercle (C) . On pose

$$t = \left(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OM} \right) \pmod{2\pi}.$$

Trouver en fonction de t les coordonnées dans $\overrightarrow{X'O'X}$, $\overrightarrow{Y'O'Y}$ du point M et du point M' transformé de M par la transformation T . [M' appartient évidemment à (Γ) .]

On appelle A le point dont les coordonnées sont $(a; 0)$ dans le système d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

Trouver l'équation qui donne les valeurs de t pour lesquelles le point M' appartient à la droite D_α issue du point A et dont la pente est $m = \tan \alpha$. (α étant un angle donné, différent de 0 et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).

En déduire que D_α coupe (Γ) en un seul point, M'_α , autre que A .

Exprimer en fonction de α la valeur de t correspondante et les coordonnées de M'_α .