∽ Clermont-Ferrand juin 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Un point M parcourt l'arc de cercle fixe AB.
Trouver l'ensemble des points P obtenus en portant sur la demi-droite BM, à partir de B, une longueur égale à AM.

EXERCICE 2

On donne l'équation

$$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = m.$$

Résoudre cette équation pour $m = 1$.
Pour quelles valeurs de m cette équation a-t-elle des solutions ?

EXERCICE 3

Soit (P) la parabole, graphique de la fonction $y = -x^2$, dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $x\mathrm{O}y$.

1. Étudier succinctement cette fonction (une représentation graphique réalisée avec soin permettra d'illustrer de figures quelques-unes des solutions demandées ; prendre 2 cm pour unité de longueur).
   Soit M_0, M_1, M_2 les points de (P) d'abscisses respectives x_0, x_1, x_2. Déterminer, en fonction de x_1 et x_2, l'équation de la droite M_1M_2 ; déterminer, en fonction de x_0, celle de la tangente à (P) en M_0.
   Soit H le point de coordonnées a et b. Montrer que, si les racines de l'équation

   $$(1) \qquad x^2 - 2ax - b = 0,$$

   sont réelles, cette équation est l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes à (P) issues du point H.
   Dans quelle région du plan le point H doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi ?
   Interpréter le cas où l'équation (1) admet une racine double.
2. **a.** Des expressions de a et de b en fonction des racines, x_1 et x_2, de l'équation (1), supposées réelles et distinctes, déduire que le lieu des points H d'où sont issues deux tangentes à (P) perpendiculaires entre elles est une droite parallèle à Ox, dont on précisera l'ordonnée.
   b. En supposant toujours réelles et distinctes les racines de (1), déterminer, en fonction de a et b, l'équation de la droite qui joint les points de contact des tangentes à (P) issues de H.
3. Soit (E) l'ensemble des points H tels que les points de contact des tangentes à (P) issues de ces points aient pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a. Montrer qu'il y a des points de (E) sur une droite d'équation $x = m$, si, et seulement si, $2m$ est un nombre entier relatif.
   On remarquera que la différence des abscisses des points de contact doit aussi être un nombre entier relatif ; décrire, en utilisant ce dernier paramètre, l'ensemble des valeurs prises par les ordonnées des points de (E) situés sur la droite $x = m$ (deux cas, selon les valeurs de m).

b. Définir, par leurs coordonnées, les points de (E) situés sur les droites $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = -1$ et dont l'ordonnée est à la fois au moins égale à -1 et au plus égale à $+6$.

4. **a.** Soit (D) la droite d'équation $y = px + q$.

Quel est l'ensemble, (D'), des points H de (D) d'où l'on peut mener à (P) deux tangentes distinctes ? Les points de contact en seront nommés M_1 et M_2.

Montrer que, lorsque H parcourt (D'), la droite M_1M_2 passe par un point fixe, dont on déterminera les coordonnées en fonction de p et q.

b. Qu'arrive-t-il si, au lieu d'une droite non parallèle à Oy comme dans le cas a., on prend pour (D) une droite parallèle à Oy, d'équation $x = r$?

N. B. - Les questions 3 et 4 sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.