Combien d'hexagones ?

Soit un hexagone de côté n, dans une trame triangulaire,

Combien y a-t-il
- de points marqués ?
- de triangles élémentaires ?
- d'hexagones ? (*)

(*) tel l'hexagone grisé de côté 2 (figure 1), formé de triangles élémentaires.

Ci-contre , on a n = 3. On décompte :
37 points marqués ;
54 triangles élémentaires ;
27 hexagones.

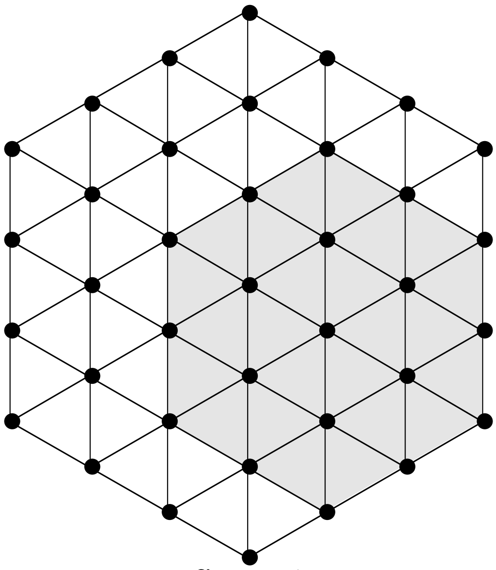


figure 1

Plus généralement, pour n quelconque, il est bon de partager l'hexagone initial (figure 2) en trois losanges (on peut penser aux trois faces visibles d'un cube).

Ainsi il apparaît qu'il y a $3n^2 + 3n + 1$ points marqués et $6n^2$ triangles élémentaires.

Nous allons montrer qu'il y a n^3 hexagones (formés de triangles élémentaires), de plusieurs manières. Notons K_n le nombre cherché.

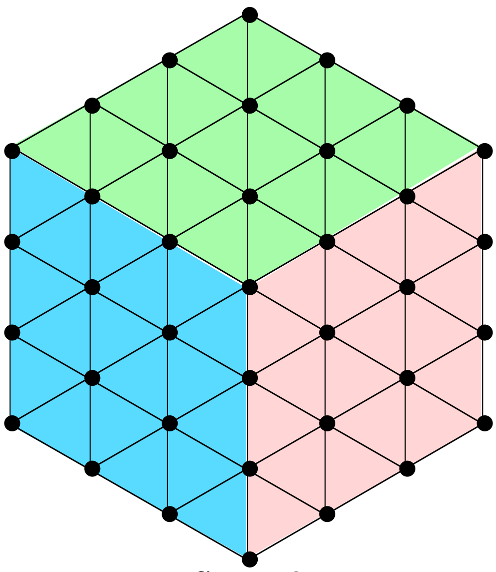


figure 2

Premier décompte

Le point du centre est le centre de n hexagones de cotés respectifs 1, 2, ... , n.
Ses six voisins sont chacun centre de n-1 hexagones de cotés respectifs 1, 2, ... , n-1.
Les douze suivants sont chacun centre de n-2 hexagones de cotés respectifs 1, 2, ... , n-2.
Etc.

Ainsi $K_n = n + 6 L_n$ où $L_n = [(n-1) + 2(n-2) + ... + (n-1)]$

Calculons L_n = Somme de k(n-k), pour $0<k<n = n(n(n-1)/2) - (n-1)(2n-1)n/6$

$L_n = n(n-1)[3n-2n+1]/6 = n(n-1)(n+1)/6 = (n^3-n)/6$

d'où $K_n = n + [n^3-n] = n^3$

Deuxième décompte (par récurrence)

La formule est vraie pour n = 1.

Centrons l'hexagone H^n de côté n dans H^{n+1} de côté n+1 (figure 3) et pour chaque hexagone de H^n augmentons le d'une unité (figure 4). C'est alors un hexagone de H^{n+1} de côté 2 ou plus et réciproquement.

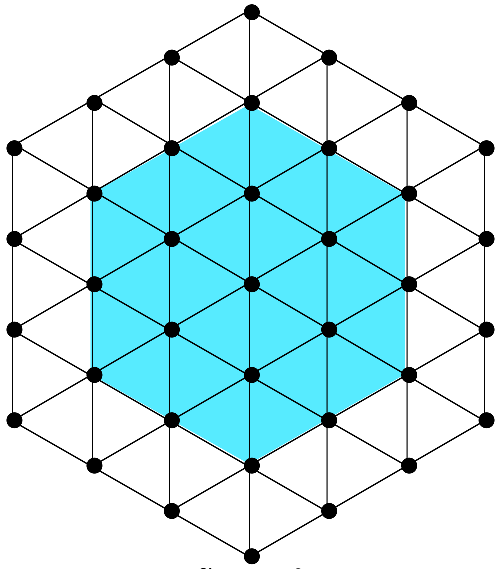


figure 3

Ainsi les hexagones de H^{n+1} sont ceux obtenus de la sorte et ceux de côté 1, dont les centres sont les points marqués de H^n, qui sont au nombre de $3n^2 + 3n + 1$ (voir plus haut).

Si par hypothèse de récurrence : $K_n = n^3$, alors $K_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

Ce qui conduis à penser que les points marqués sont des hexagones de côté 0.

Troisième décompte (direct)

Revenons à la figure 2, en considérant qu'elle représente aussi un cube de côté n constitué de n^3 petits cubes de côté 1.

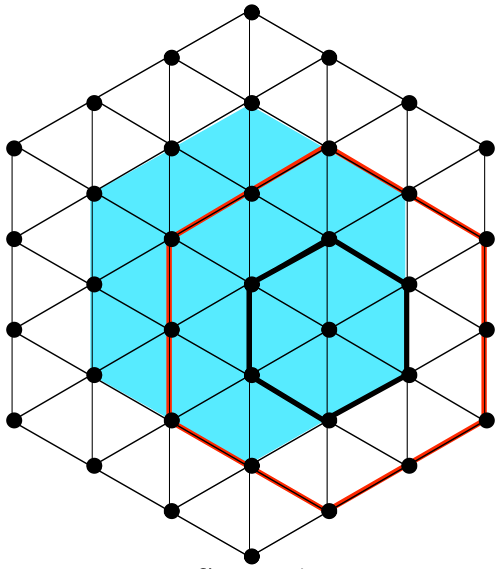


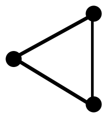
figure 4

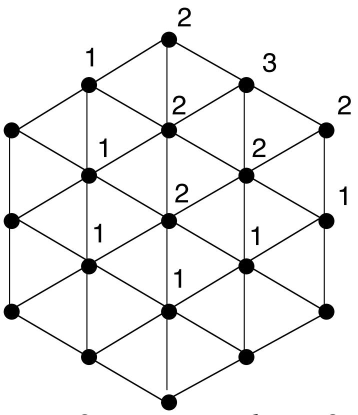
Un hexagone de H^n de coté k représente le contour apparent d'un sous-cube de côté k, ayant une face (au moins) commune avec une face avant du grand cube. Or un tel sous-cube est caractérisé par son petit cube le plus éloigné. En effet, partant d'un petit cube il suffit de le dilater vers l'avant le plus possible en restant dant le grand cube.

Autrement dit, il y a autant de sous-cube du grand cube, ayant avec lui une face avant commune que de petits cubes. Leurs contours apparents sont les hexagones à dénombrer. Il sont au nombre de n^3.

Ce qui suit est "merdique", en ébauche.

Combien de triangles équilatéraux formés de triangles élémentaires.

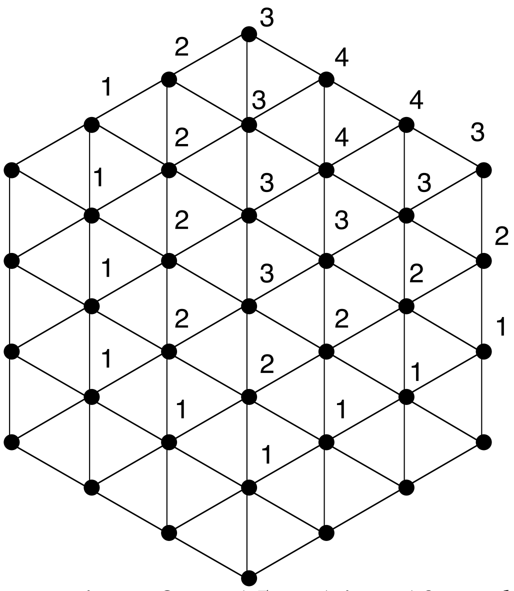
On s'interesse aux seuls triangles droits  le coté vertical est à droite.



3 7 6 3 **19**

Ci-contre, les nombres marqués correspondent aux nombres de triangles dont le plus haut sommet est au point marqué.

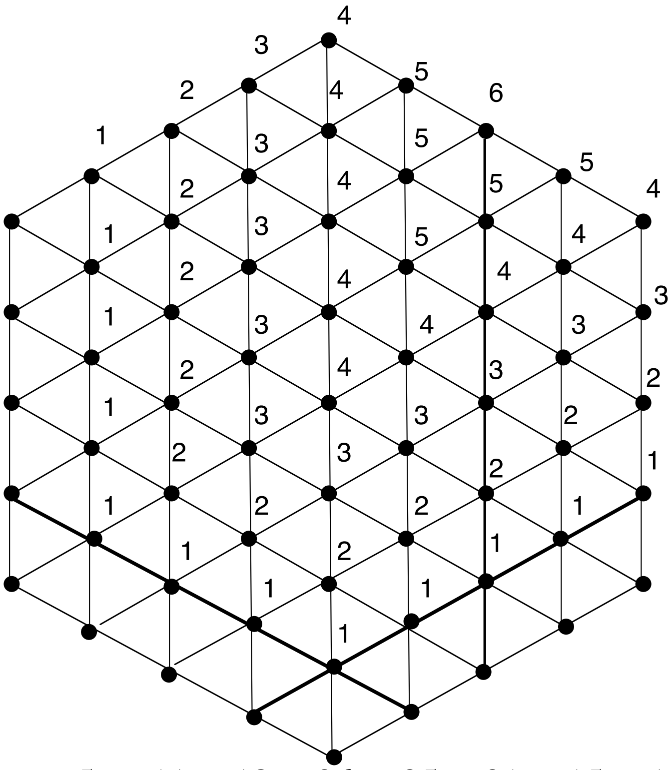
Pour n = 2, le total est 19.



4 9 15 14 10 6 **58**

De même ici, les nombres marqués correspondent aux nombres de triangles dont le plus haut sommet est au point marqué.

Pour n = 3, le total est 58.



De même ici, les nombres marqués correspondent aux nombres de triangles dont le plus haut sommet est au point marqué.

Pour n = 4, le total est 131.

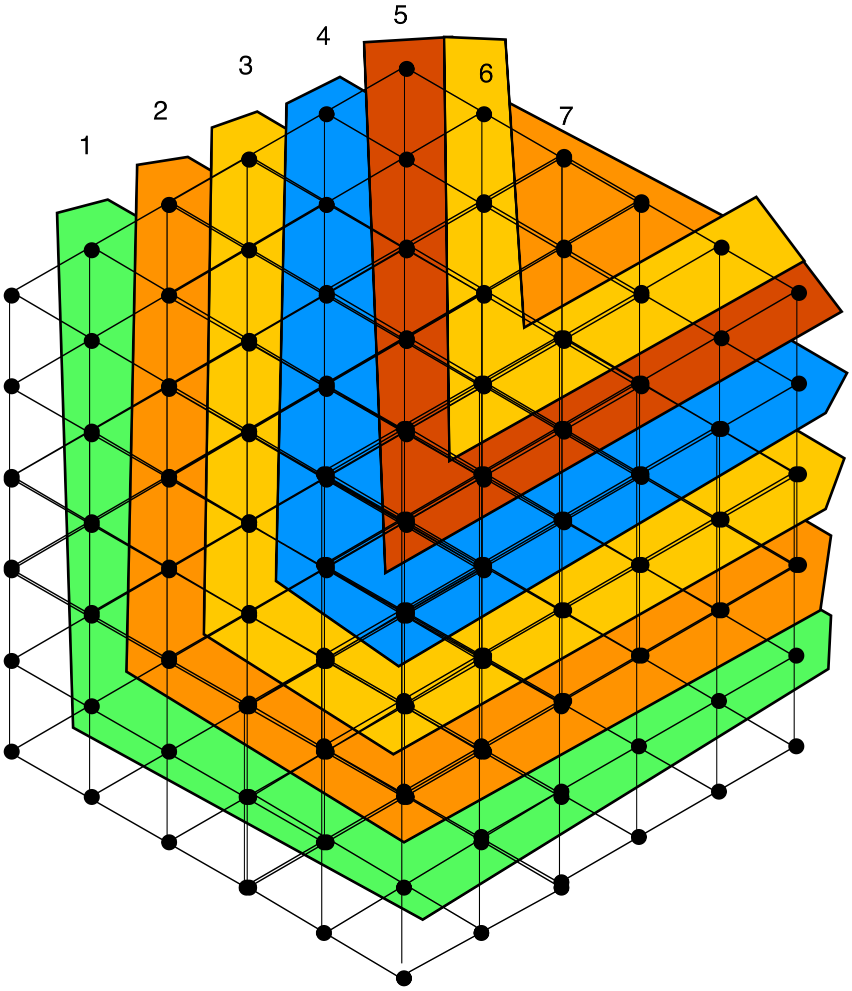
5 11 18 26 25 21 15 10 **131**

Ou 1*12+2*11+3*10+4*9+5*5+6*1 = 12+22+30+36+25+6 = 131

Pour n = 5 le tableau est

6 13 21 30 40 39 35 28 21 15 **248**

Ou 1*15 +2*14+3*13+4*12+5*11+6*7+7*3 = 15+28+39+48+55+42+21 = 248



Conjecture

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	19	58										

0	0
1	3
2	19
3	58
4	131
5	248
6	420
7	657
8	970
9	1369
10	1865
11	2468
12	3189
13	4038
14	5026
15	6163
16	7460
17	8927
18	10575
19	12414
20	14455

$T(n) = 7n^3/4 + 9n^2/8 + n/4 - 1/16(1-(-1)^n)$

$16\ T(n) = 28n^3 + 18n^2 + 4n - 1 + (-1)^n$