

Fractions et calendriers à partir de *L'Introduction aux Phénomènes de Géminos* François PUEL ⁽¹⁾

Les calendriers sont des systèmes sociaux de mesure du temps prenant le jour comme unité. La plupart ont essayé d'ajuster le plus exactement possible les trois grands cycles astronomiques (jour, lunaison et année des saisons) qui rythment et conditionnent la vie des hommes. Malheureusement l'année tropique (année des saisons), valant actuellement 365,2422... j, (365,2424... j dans l'antiquité) et la lunaison moyenne ou mois lunaire (29,5306... j) ne comptent pas un nombre entier de jours, et l'année ne contient pas un nombre entier de lunaisons.

Les calendriers solaires, bien adaptés aux besoins de beaucoup de peuples, prennent en général une année normale de 365 jours. Mais de temps en temps, pour corriger une dérive des saisons, ils rajoutent à cette année un jour supplémentaire (que l'on dit chez nous bissextil).

Les calendriers lunaires prennent une année de 12 mois alternativement de 29 et de 30 jours, soit 354 j. Mais de temps en temps, pour éviter une dérive des phases de la lune, ils prennent une année "abondante" de 355 j.

Les calendriers luni-solaires, sont les plus compliqués et les plus intéressants. Il s'agit maintenant de concilier trois unités de temps différentes : le jour, le mois lunaire, facile à repérer et d'utilisation générale certainement très ancienne, et l'année solaire, indispensable pour les peuples agriculteurs ou marins. Pour éviter un trop grand décalage entre une année formée de 12 mois lunaires et le retour des saisons, la solution est de rajouter un mois intercalaire de temps en temps. Pour les Chaldéens et les Hébreux, ces intercalations se faisaient empiriquement à partir de l'observation du ciel et de la végétation. Ensuite elles se sont faites plus régulièrement.

C'est pour l'établissement des valeurs moyennes des cycles astronomiques et pour régler les intercalations que l'on a besoin, plus ou moins explicitement, des fractions.

Pour ne pas tomber dans un exposé encyclopédique, nous nous limiterons en général aux calendriers décrits dans *L'Introduction aux phénomènes de Géminos*.

I *L'Introduction aux Phénomènes de Géminos*

L'auteur très mal connu, sans doute grec originaire de Rhodes, a séjourné à Rome. Il a vécu entre 100 avant et 100 après J.-C. *L'Introduction aux Phénomènes*, écrit en grec, est un manuel d'initiation aux questions d'astronomie, de géographie mathématique, de calendrier. Cet ouvrage contient probablement le plus important exposé sur les calendriers de l'Antiquité.

Dans le livre I qui traite du zodiaque, Géminos définit l'année solaire et donne sa valeur en jours ; il définit les saisons et donne leurs valeurs. Puis il explique leur inégalité par l'excentricité (décentrement) du cercle du soleil. Dans le livre VIII traitant des mois, l'auteur définit le mois lunaire et donne sa valeur en jours ; ensuite il explique l'élaboration de certains calendriers célèbres : le calendrier solaire égyptien et le calendrier luni-solaire grec dont il donne les différentes améliorations au cours des siècles (un mois supplémentaire tous les 2 ans, 3 mois tous les 8 ans - "l'octaétéride", 7 mois tous les 19 ans - le fameux "cycle de Méton").

II Différentes formulations des fractions rencontrées dans *L'Introduction aux phénomènes*

1) Fractions égyptiennes : Les anciens Égyptiens ne connaissaient comme fractions, à l'exception de 2/3, que les inverses de nombres entiers, ce qui les obligeait à des formulations assez compliquées, par exemple 2/29 était

noté : $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$ (papyrus Rhind)

Dans les problèmes de calendriers, la fraction à décomposer n'étant en général connue que d'une manière approchée, le mieux est sans doute d'essayer par tâtonnement avec des dénominateurs correspondant aux cycles que l'on veut trouver a priori.

Géminos a utilisé ce type de formulation :

Il donne $365 + \frac{1}{4} j$ pour la valeur de l'année, et $29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{33} j$ pour le mois lunaire.

¹ Observatoire de Besançon, francois.puel@wanadoo.fr

Géminos sait calculer avec ces fractions égyptiennes : par exemple retranchant l'année lunaire de l'année solaire, il obtient $\left(365 + \frac{1}{4}\right) - \left(354 + \frac{1}{3}\right) = 10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}j$ et, multipliant cet écart par 8, il obtient $8 \times \left(10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 87 + \frac{1}{3}j$.

2) Autres fraction : Géminos utilise aussi des formulations plus générales, par exemple il note $365j \frac{5}{19}$ la valeur de l'année adoptée pour le cycle de Méton.

3) Fractions sexagésimales : Notre numération de position décimale nous permet de noter d'une manière raccourcie 3,14159 au lieu de $3 + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5}$

De même, les chaldéens utilisaient une numération de position à base 60.

A leur suite, dans le calcul de l'erreur de l'octaétéride, Géminos prend pour le mois lunaire $29j 31' 50'' 8''' 20''''$, c'est-à-dire $29 + \frac{31}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \frac{20}{60^4}j$.

III Comment a-t-on pu arriver à des périodes et des règles d'intercalation précises ?

On en est réduit aux conjectures. Il est certain que l'on n'a pu y arriver que par des observations portant sur de longues périodes. Il a du y avoir de nombreux tâtonnements qui peuvent s'exprimer en termes de fractions de différentes manières.

1) D'abord sous la forme des fractions égyptiennes avec des cycles que l'on pourrait chercher a priori. Exemple du calendrier luni-solaire : $\frac{365,2424}{29,5306} \approx 12,368269$.

Si on cherche des cycles de 4 ans à cause des olympiades, on rajoute un mois tous les 4 ans, puis, cette correction étant insuffisante, encore un mois tous les 8 ans, ce qui nous fait $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$: c'est l'octaétéride ; etc.

2) On peut aussi imaginer d'exprimer les tâtonnements par des suites d'intercalations de périodes différentes d'où des fractions de la forme $\frac{i+j}{im+jn}$

Commençons par un exemple : on veut concilier le mois lunaire avec l'année solaire par l'adjonction d'un mois intercalaire de temps en temps.

La fréquence moyenne doit être $\frac{365,2424}{29,5306} - 12 \approx 0,368269$.

On essaye un mois tous les 2 ans. La fréquence est $\frac{1}{2} = 0,5$, c'est beaucoup trop.

On peut essayer alors un mois intercalaire tous les 3 ans, fréquence $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, trop faible.

On essaye alors 1 mois intercalaire tous les 3 ans et 1 tous les 2 ans ; on obtient une fréquence $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5} = 0,4$:

c'est la fréquence d'intercalation du calendrier gaulois de Coligny (Parisot).

C'est une espèce de moyenne entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ (on dit souvent "médiation") que certains ont appelée "l'addition des cancre" (Ferréol).

En fait, on n'additionne pas des fractions, mais on fait se succéder des intercalations.

Pour améliorer l'approximation, prenons 2 fois une intercalations tous les 3 ans et une pour 2 ans, la fréquence devient $\frac{1+1+1}{3+3+2} = \frac{2+1}{2 \times 3 + 2} = \frac{3}{8} = 0,375$: c'est celle de l'octaétéride.

On obtiendrait de même l'approximation du cycle de Méton : $\frac{7}{19} = \frac{5+2}{5 \times 3 + 2 \times 2} \approx 0,3684$.

La possibilité d'approcher par cette méthode une fréquence donnée d'aussi près que l'on veut repose sur la

propriété : Toute fraction rationnelle $\frac{n}{d}$ comprise entre $\frac{n_1}{d_1}$ et $\frac{n_2}{d_2}$ peut s'exprimer sous la forme $\frac{n}{d} = \frac{in_1 + jn_2}{id_1 + jd_2}$

(il suffit de prendre $i = n_2d - nd_2$ et $j = nd_1 - n_1d$).

Tableau des fractions de la forme $\frac{i+j}{3i+2j}$ (les fractions utilisées par des calendriers luni-solaires sont en caractères gras) :

	i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j = 0	0	1/3	2/6	3/9	4/12	5/15	6/18	7/21	8/24	9/27
1	1/2	2/5	3/8	4/11	5/14	6/17	7/20	8/23	9/26	--
2	2/4	3/7	4/10	5/13	6/16	7/19	8/22	9/25	--	--

IV Les fractions continues

C'est un moyen efficace de trouver de bonnes approximations rationnelles du rapport de deux périodes, et donc de bonnes règles d'intercalations.

1) **Définition** : soit un nombre positif réel α et le développement

$$\alpha = u_0 + \frac{1}{a_1}, \dots, \alpha_{n-1} = u_{n-1} + \frac{1}{a_n} \text{ avec les } \alpha_i \text{ réels positifs supérieurs à 1 et les } u_i \text{ entiers positifs}$$

A l'étape n , on prend l'inverse de la partie fractionnaire de α_{n-1} :

$$u_{n-1} = \mathbf{Int}(\alpha_{n-1}), \text{ où la notation } \mathbf{Int}() \text{ désigne la } \underline{\text{fonction partie entière}} : \alpha_n = \frac{1}{a_{n-1} - u_{n-1}}.$$

Les α_i sont les quotients totaux et les u_i les *quotients partiels* successifs.

Ce développement :

$$\alpha = u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \frac{1}{u_4 + \frac{1}{u_5 + \frac{1}{u_6 + \dots}}}}}}$$

que nous noterons $\alpha = (u_0; u_1, u_2, u_3, u_4, \dots)$ est le développement en *fraction continue* de α . Ce procédé s'arrête si et seulement si α est rationnel.

Résumons encore l'algorithme permettant de trouver la série des quotients partiels :

**Noter et retrancher la partie entière, inverser le reste,
noter et retrancher la nouvelle partie entière, inverser le nouveau reste, etc.**

2) **Approximations de α à partir de son développement**

Définissons

$P_0 = u_0$	$Q_0 = 1$
$P_1 = u_0 u_1 + 1$	$Q_1 = u_1$
$P_2 = (u_0 u_1 + 1) u_2 + u_0$	$Q_2 = u_1 u_2 + 1$
...	...
$P_n = P_{n-1} u_n + P_{n-2}$	$Q_n = Q_{n-1} u_n + Q_{n-2}$

Les fractions rationnelles $\frac{P_n}{Q_n}$ s'appellent les *réduites* successives de α .

Les entiers Q_i et P_i successifs vont croissant.

De l'itération $P_{n+1} = P_n u_{n+1} + P_{n-1}$, $Q_{n+1} = Q_n u_{n+1} + Q_{n-1}$

on tire la relation $P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = - (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) = \dots = (-1)^n$

P_n et Q_n sont donc premiers entre eux et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_n \times Q_{n+1}}$

$$\text{d'où } \left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n \times Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Les réduites successives $\frac{P_n}{Q_n}$ sont des fractions irréductibles convergeant en alternant vers α .

3) Applications aux calendriers

Premier exemple, l'année solaire :

L'année tropique, qui dure actuellement 365,2422...j, était au début de notre ère de 365,2424...j.

Développons $\alpha = 0,2424$: $\alpha = (0; 4, 7, 1, 37, \dots)$

Les réduites successives sont $0, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{303}{1250}, \dots$

La partie entière donne l'année "vague" de 365 j des égyptiens.

La première réduite donne l'année julienne de 365,25 j.

La troisième, $8/33 = 0,2424\dots$ a été utilisée en Perse au XI^e siècle.

Deuxième exemple, les calendriers luni-solaires : $\frac{365,2424}{29,5306} \approx 12,368269$.

Développons $\alpha = 0,368269$: $\alpha = (0; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 1, 1, 1, \dots)$.

Les réduites successives sont : $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{123}{334}, \frac{130}{353}, \frac{2653}{5000}, \dots$

Les solutions du 13^e mois tous les 2 puis tous les 3 ans ont été employées par les grecs.

La solution 3/8 (99 mois lunaires pour 8 ans) est la base de l'octaétéride des Grecs.

La réduite 7/19 (235 lunaisons pour 19 ans) nous donne le cycle de Méton (Athènes, 433 av. J.-C.) utilisé par le calendrier juif et le calendrier liturgique chrétien ainsi que par les calendriers chinois, tibétain etc.

Les réduites successives sont les mêmes jusqu'à 7/19, que l'on adopte la valeur actuelle de 365,2422...j ou l'approximation grégorienne de 365,2425 j.

4) Cet algorithme des fractions continues, connu explicitement depuis le XVII^e siècle, aurait-il pu être ébauché par les anciens ?

Géminos n'en prend que la soustraction de la partie entière, continuant apparemment les calculs par tâtonnements, et d'ailleurs le système de numération grec rendait les divisions extrêmement difficiles. Cependant, le calcul des fractions continues peut se ramener à l'algorithme d'Euclide pour déterminer le plus grand diviseur commun (p.g.c.d.) de 2 nombres entiers donnés et celui-ci ne fait appel qu'à des divisions euclidiennes qui peuvent se ramener à des suites de soustractions répétées jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur. Alors pourquoi pas ?

Bibliographie

Couderc, P. : *Le Calendrier*, P.U.F. "Que sais-je ?" n° 203.

Dumont, M. : *Le nombre π et les fractions continues*, in "Le petit Archimède", numéro spécial " π ", mai 1980.

Ferréol, R. : *Addition des cancrs, suites de Brocot et friandises associées*, in "Quadratures", avril-mai-juin 1999.

Géminos, *Introduction aux Phénomènes*, présentation, édition et traduction par G. Aujac, "Les Belles Lettres", Paris, 1975.

Lefort, J. : *La saga des calendriers*, Belin "Pour la Science", Paris, 1999.

Parisot, J.P. et Suagher, F. : *Calendriers et chronologie*, Masson, Paris, 1996.

Trignan, J. : *Fractions continues*, Editions du Choix, Argenteuil, 1994.

Valiron, G. : *Théorie des fonctions*, Masson, Paris, 1942 (§ 11-14 sur les fractions continues).