Concours Accès 7 avril 2022

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices 1 à 5 : Raisonnement logique

1. À l'approche de l'été, l'institut Sondamétric a interrogé 1 000 personnes sur leurs intentions d'achat des trois produits suivants : chapeau, lunettes de soleil et t-shirt.
Les informations suivantes ont été recueillies :

- Les personnes interrogées n'achèteront pas plus d'un article de chacun des trois produits ;
- Il y a 10 fois plus de personnes qui souhaitent acheter uniquement un t-shirt que d'acheteurs potentiels d'un chapeau uniquement ;
- 25 % des personnes ont l'intention de n'acheter qu'une paire de lunettes solaires ;
- 50 % des personnes qui souhaitent acheter un t-shirt ont aussi l'intention d'acheter une paire de lunettes solaires ;
- 700 personnes souhaitent acheter une paire de lunettes solaires, 400 un t-shirt et 360 un chapeau ;
- 100 personnes ont l'intention d'acheter uniquement un t-shirt et un chapeau.

Le prix moyen des chapeaux est de 20 €, celui des lunettes solaires 30 € et celui des t-shirts 15 €.
À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. 100 personnes ont l'intention de ne rien acheter.
B. On ne peut déduire le nombre de personnes qui ont l'intention d'acheter les trois produits.
C. 450 personnes exactement ont l'intention d'acheter au moins 2 produits.
D. Le chiffre d'affaires potentiellement généré par ces 1 000 personnes, est estimé à 32 500 €.

2. Une étude de marché est réalisée par une promotion comportant n étudiants. Ces étudiants doivent renseigner des questionnaires sur une durée totale de x jours.
On sait que :

- Les filles sont 2 fois plus nombreuses que les garçons ;
- En moyenne, une fille a renseigné 20 questionnaires par jour ;
- Les garçons ont renseigné 12 000 questionnaires sur les x jours.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. En moyenne, un garçon a renseigné un nombre journalier de questionnaires égal à $\dfrac{36\,000}{x.n}$
B. En moyenne sur la durée totale, une fille a renseigné $\dfrac{20x}{n}$ questionnaires.
C. Si les filles ont renseigné 32 000 questionnaires sur les x jours, alors : $x = \dfrac{2\,000}{n}$
D. Pour 44 000 questionnaires renseignés au total par l'ensemble des filles et des garçons, et un nombre de garçons égal à 40, on en déduit que x est inférieur à 18 jours.

3. Alexandre, Barnabé, Chloé et Denis, vendeurs de produits financiers (aux performances différentes) se partagent un bonus accordé à leur équipe.

Le bonus d'Alexandre est 3 fois moins élevé que celui de Denis.

Le bonus de Denis est 20 % plus élevé que celui de Barnabé.

Les bonus cumulés d'Alexandre et de Denis sont égaux aux bonus cumulés de Barnabé et de Chloé.

On sait que Chloé a touché un bonus de 3 000 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Les bonus cumulés d'Alexandre et Chloé sont égaux à 6 000 €.
B. Le bonus le plus élevé est égal à 9 000 €.
C. Le bonus de Chloé est 50 % plus élevé que celui d'Alexandre.
D. Le montant total du bonus qui a été partagé entre ces 4 vendeurs est supérieur à 17 000 €.

4. Paul a assisté à trois cours, d'une heure chacun, qui se sont succédés de 14 heures à 17 heures. La salle de coworking, un amphi et une salle informatique ont été utilisées. Les intervenants qui ont enseigné sont un chargé de TD, un enseignant chercheur et un enseignant extérieur.

On sait que :

- L'intervenant de marketing est chargé de TD ;
- Le cours de psychologie a eu lieu en amphi ;
- Le cours de finance a eu lieu en deuxième heure ;
- L'intervenant chargé de TD et l'enseignant chercheur se sont succédés ;
- Le cours en salle informatique a eu lieu en première heure.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le cours de l'intervenant extérieur a eu lieu en première heure.
B. De 16 h à 17 h, le cours a eu lieu en salle de coworking.
C. L'intervenant en finance est enseignant chercheur.
D. Le cours de psychologie a précédé le cours de finance.

5. On réalise l'expérience suivante : un élastique de x cm est tendu à son maximum pendant 1 h et est ensuite relâché. Après l'expérience, on constate que l'élastique s'est allongé de 6 %.

Ce phénomène se reproduit à chaque fois que l'expérience est répétée, jusqu'à rupture de l'élastique. Soit y l'entier immédiatement supérieur à $\dfrac{ln 2x}{\ln 1,06}$.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Si on répète l'expérience n fois, l'élastique mesurera $(1,06x)^n$ cm à la fin.
B. Si on répète l'expérience 2 fois, l'élastique se sera allongé de plus de 10 %.
C. Après n expériences, l'élastique se sera allongé de $0,06^n$ cm.
D. Pour atteindre au moins une longueur de $2x$ cm, il faut répéter l'expérience y fois.

Exercices n° 6 à 10 : Raisonnement mathématique

6. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan.

A. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
B. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $\quad f(x) = \dfrac{4}{\text{e}^{-x}+1}$.
C. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, la dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{4\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2}$.
D. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation réduite $y = x+2$.

7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^x - 2.$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$du plan.

A. Pour tout x réel, la dérivée de f est $f'(x) = \text{e}^x(2\text{e}^x - 1)$.
B. La fonction f est décroissante sur $]-\infty~;~\ln(0,5)[$.
C. L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.
D. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, est parallèle à l'axe des abscisses.

8. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \dfrac{8}{x\left(x^2-4\right)}.$$

Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$du plan.

A. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ privé de $\{0~;~2\}$.
B. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $\quad f(-x) = -f(x)$.
C. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
D. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) = -\dfrac{2}{x} + 1 + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$.

9. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right).$$

Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathcal{D}'_f$ celui de sa dérivée.

A. $\mathcal{D}_f =]-2~;~2[$.
B. $f(0) = 0$.
C. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$ on a $f(-x) = -f(x)$.
D. Pour tout x de $\mathcal{D}'_f$ on a $f'(x) = -\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{2+x}$.

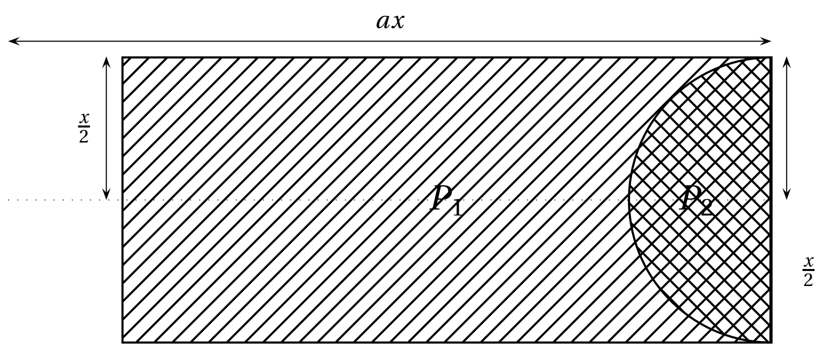
10. On considère d'une part, une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n~;~0,2)$ où n est un entier naturel non nul, fixé.
On considère d'autre part, une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3~;~0,2)$.

A. $P(X=1) = n \times 0,2^{n-1} \times 0,8$.
B. Si on veut que la variance de X soit égale à $0,8$ alors il faut que $n = 5$.
C. $P(Y \leqslant 2) = 0,691$.
D. $P(2 < y \leqslant 3) = 0,005/$

Exercices n° 11 à 15 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

M. Dupont est propriétaire d'une exploitation agricole. Il possède un champ représenté dans le schéma ci-dessous par la zone hachurée. On appelle P_1 cette partie.
La partie quadrillée notée P_2, qui représente un demi-disque de rayon $\dfrac{x}{2}$, appartient à son voisin M. Michel.
Soient $x > 0$ et $a > 1$.
Notons que toutes les mesures sont exprimées en mètres.
Par souci de simplicité, on suppose que $\pi \approx 3,14$.



11. À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le périmètre (en mètre) du champ de M. Dupont est égal à $2x + 2ax - \dfrac{\pi}{2}x$.
B. L'aire (en m^2) de la partie P_2 est égale à $\dfrac{\pi}{4}x^2$.
C. L'aire (en m^2) de la partie P_1 est égale à $\left(a - \dfrac{\pi}{8}\right)x^2$.
D. Pour $a = \dfrac{3\pi}{8}$, l'aire de la partie P_l vaut le double de celle de la partie P_2.

12. M. Dupont et M. Michel s'accordent à cofinancer une clôture qui séparera les deux parties qui leur appartiennent.

- M. Dupont a obtenu un devis dont le coût fixe est 1 000 € plus cinq € par mètre de clôture.
- M. Michel a obtenu un autre devis qui coûte 25 € par mètre de clôture.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Si $x = 50$, la longueur de la clôture sera supérieure à 78 mètres.
B. Si $x = 50$, le montant du devis apporté par M. Dupont dépasse 1 400 €.
C. Si $x = 50$, le montant du devis apporté par M. Michel est plus intéressant que celui apporté par M. Dupont.
D. Si $x = \dfrac{100}{\pi}$, les deux devis sont équivalents.

13. M. Dupont envisage de produire des tomates et/ou des tournesols sur sa parcelle.
On nous précise que pour 19 €, M. Dupont pourrait obtenir 10 plants de tomates et 20 plants de tournesols.
Pour 5 € il n'aurait que 3 plants de tomates et 5 plants de tournesols.
Supposons qu'on puisse planter 4 plants de tomates par m^2 et 6 plants de tournesols par m^2,
Soit x_1 le prix d'un plant de tomates et x_2 le prix d'un plant de tournesols.

M. Dupont décide de planter $\beta\,\%$ de sa parcelle avec des tomates et le reste avec des tournesols. Pour cette question, on suppose que $a = 1,4$ et, par souci de simplicité, on considère que $\dfrac{\pi}{4} \approx 0,8$.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. $5x_1 + 3x_2 = 5$

B. $x_2 = x_1 - 0,2$

C. Le prix des plants de tomates, qui seront plantés sur la parcelle, est de βx^2.

D. Si $x = 20$ et $\beta = 10$, le prix total que M. Dupont doit payer pour planter l'ensemble de sa parcelle est de 1 592 €.

14. M. Dupont pense finalement planter uniquement des plants de tournesols et produire de l'huile par la suite.

Soit y la quantité d'huile (en litre par m^2) qu'on peut produire.

Le coût de production (par m^2) est défini par la fonction suivante :

$$C(y) = 0,25y^2 + y + 5,25.$$

Le prix de vente d'un litre d'huile est égal à p €.

Rappelons que le bénéfice est défini comme étant la différence entre le prix de vente et le coût de production.

Pour cette question, on suppose que $a = 1,4,\ x = 100$ et on considère toujours que $\dfrac{\pi}{4} \approx 0,8$.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Si $p = 0,85$, alors le prix total de vente est inférieur à $8\,000y$.

B. Si $p = 3,50$, alors le bénéfice (par m^2) est nul pour y égal à 3 et y égal à 6 litres.

C. Si $p = 3,50$, alors le bénéfice (par m^2) atteint son maximum pour y égal à 5 litres.

D. Si $p = 3,50$ et $y = 4$, alors le bénéfice total est égal à 5 000 €.

15. Soit I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $(x\ ;\ y)$ un couple de réels appartenant respectivement à I et à J.

On appelle fonction numérique de deux variables réelles, toute fonction, qui au couple $(x\ ;\ y)$ associe un réel noté $f(x\ ;\ y)$. Explicitement, nous avons :

$$f:\quad \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ;\ y) & \longmapsto & f(x\ ;\ y) \end{array}$$

Exemple : on définit la fonction f « aire d'un rectangle » comme suit :

$$f:\quad \begin{array}{ccc}]0\ ;\ +\infty[\times]0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x\ ;\ y) & \longmapsto & f(x\ ;\ y) = xy \end{array}$$

où x et y représentent la longueur et la largeur du rectangle.

Finalement, M. Dupont décide de produire de l'huile de tournesol et du jus de tomate. Soient n_1 le nombre total des plants de tomates plantés au début de la saison et n_2 le nombre total des plants de tournesols plantés au début de la saison.

M. Dupont a les informations suivantes :

- Un plant de tomate produit 0,75 litre de jus de tomate sur une saison ;
- Un plant de tournesol produit 0,5 litre d'huile sur une saison ;
- Le prix de vente d'un litre de jus de tomate est égal à 2 € ;
- Le prix de vente d'un litre d'huile de tournesol est égal à 3,50 € ;

- Le prix d'achat d'un plant de tomate est de 0,50 € ;
- Le prix d'achat d'un plant de tournesol est de 0,70 € ;
- Le coût d'entretien et de récolte, à la fois pour les tomates et les tournesols, est égal à 0,3 € par plant planté ;
- Le prix total d'engrais utilisé durant la saison est égal à $0,01 \times n_1 \times n_2$;
- À cause des maladies et du climat, 10 % des plants de tomates plantés et 20 % des plants de tournesols plantés meurent avant toute production ;
- Les coûts fixes durant la saison, indépendants du nombre de plants, sont de 20 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le coût total, noté C, est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut :

$$C(n_1\ ;\ n_2) = 0,8n_1 + n_2 + 0,01n_1n_2 + 20.$$

B. Le prix total des ventes, noté T, est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut :

$$T(n_1\ ;\ n_2) = 1,5n_1 + 1,75n_2.$$

C. Le bénéfice total, noté B,est une fonction de n_1 et n_2 et il vaut :

$$B(n_1\ ;\ n_2) = 0,55n_1 + 0,4n_2 - 0,01n_1n_2 - 20.$$

D. Supposons que le nombre total des plants de tomates plantés au début de la saison est égal à celui des plants de tournesols.
On peut en déduire que le bénéfice total sera positif lorsque le nombre total des plants plantés est compris entre 32 et 62.