

CONCOURS AVENIR - 8 MAI 2013

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :

Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fautive est pénalisée par le retrait d'1 point.

SIMPLIFICATIONS D'ÉCRITURES

1. $\frac{1}{2} \ln(27) - 2 \ln(3) + \ln(\sqrt{3})$ est :
 - a. nul
 - b. strictement négatif
 - c. strictement positif
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
2. $\frac{-2e^2 \times 3e^4}{(2e^2)^2 - 3e^4}$ est égal à :
 - a. $\frac{1}{2e^2}$
 - b. $-6e^2$
 - c. $-5e^2$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
3. $[\ln(3)]^2 - 2 \ln(3)$ est :
 - a. nul
 - b. strictement négatif
 - c. strictement positif
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
4. $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ est égal à :
 - a. $\frac{1}{2}$
 - b. 1
 - c. 2
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

5. f est continue en -1 signifie que :
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ est un réel
 - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1)$ est un réel
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+x) - f(-1)}{x}$ est un réel
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
6. f est dérivable en -1 signifie que :
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ est un réel
 - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1)$ est un réel
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+x) - f(-1)}{x}$ est un réel
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

Soit g une fonction définie sur $[-1; 2]$ telle que $g(-1) = 2$; $g(0) = 1$; $g(1) = 0$ et $g(2) = -1$.

7. On est certain que sur $[-1; 2]$:
- g est strictement décroissante
 - g est strictement croissante
 - g n'est pas strictement décroissante
 - g n'est pas strictement croissante
8. On est certain que sur $[-1; 2]$, l'équation $g(x) = 0,5$:
- n'admet pas de solution
 - admet une unique solution
 - admet au moins une solution
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

9. $\frac{1}{x} \leq 0,2$ a pour solution :
- $]0; 5]$
 - $[5; +\infty[$
 - $] -\infty; 5]$
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
10. Le nombre de solutions de l'équation : $\ln(x^2) = [\ln(x)]^2$ est :
- 0
 - 1
 - 2
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
11. Le nombre de solutions de l'équation : $[\ln(x)]^2 = -[\ln(x)]^2$ est :
- 0
 - 1
 - 2
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
12. Le nombre de solutions de l'inéquation : $e^{-x^2} \geq 1$ est :
- infini

- b. 0
 - c. 1
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
13. Le nombre de complexes distincts solutions de l'équation : $2z^2 - 5z + 3 = 0$ est égal à :
- a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

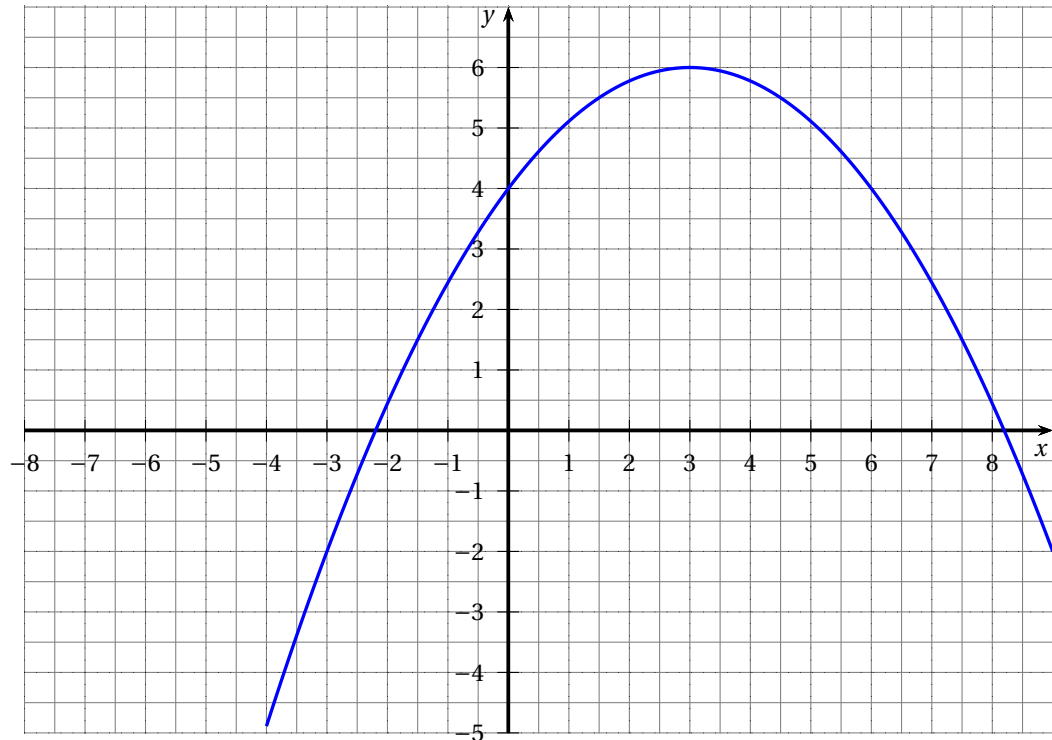
IMPLICATIONS ET ÉQUIVALENCES

Dans les quatre items suivants, P_1 et P_2 sont deux propositions et a et b deux réels. De manière générale :

14. Si $P_1 : « a^3 = b^3 »$ et $P_2 : « a = b »$ alors :
- a. seule P_1 implique P_2
 - b. seule P_2 implique P_1
 - c. P_1 et P_2 sont équivalentes
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
15. Si $P_1 : « \ln(a) = \ln(b) »$ et $P_2 : « e^a = e^b »$ alors :
- a. seule P_1 implique P_2
 - b. seule P_2 implique P_1
 - c. P_1 et P_2 sont équivalentes
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
16. Si $P_1 : « a^2 = b »$ et $P_2 : « a = \sqrt{b} »$ alors :
- a. seule P_1 implique P_2
 - b. seule P_2 implique P_1
 - c. P_1 et P_2 sont équivalentes
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
17. Si $P_1 : « AB^2 = AC^2 + BC^2 »$ et $P_2 : « ABC \text{ est un triangle rectangle } »$ alors :
- a. seule P_1 implique P_2
 - b. seule P_2 implique P_1
 - c. P_1 et P_2 sont équivalentes
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Ci-dessous la parabole représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} .



Soient les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel n , respectivement par :

$$U_n = f(n) \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 & = a \\ V_{n+1} & = f(V_n) \end{cases} \quad \text{où } a \text{ est un réel}$$

18. La tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation :
- $x = 6$
 - $y = 6$
 - $y = 6x - 18$
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
19. Sur \mathbb{R} , la dérivée de f est définie par $f'(x) =$
- $\frac{-4}{9}x - \frac{4}{3}$
 - $\frac{-4}{9}x + \frac{4}{3}$
 - $\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$
 - $\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] =$
- $-\infty$
 - $+\infty$
 - 0
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
21. $\int_{-1}^{-4} f(x) dx :$
- est nulle

- b. strictement négative
 - c. strictement positive
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
22. La suite (U_n) est :
- a. minorée non majorée
 - b. majorée non minorée
 - c. bornée
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
23. Pour $a = 1$, V_2 appartient à :
- a. $[0 ; 2]$
 - b. $[2 ; 4]$
 - c. $[4 ; 6]$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
24. Pour $a = -1$, la suite (V_n) est :
- a. constante
 - b. strictement décroissante
 - c. strictement croissante
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
25. Pour $a = -4$, (V_n) :
- a. est convergente
 - b. diverge vers $-\infty$
 - c. diverge vers $+\infty$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

LA TRIGONOMÉTRIE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

26. f est :
- a. paire
 - b. impaire
 - c. paire et impaire
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
27. f est :
- a. périodique de période 2π
 - b. périodique de période 6π
 - c. périodique de période $2\pi/3$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
28. Le nombre de solutions sur $[-2\pi ; 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$ est :
- a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. 3
29. Sur \mathbb{R} , la fonction dérivée f' est définie par $f'(x) =$
- a. $-x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
 - b. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

- c. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
30. Sur \mathbb{R} , la primitive F de f telle que $F(0) = 0$ est définie par $F(x) =$
 a. $\frac{x^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
 b. $\frac{3x^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
 c. $9 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 3x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
 a. 0
 b. $-\infty$
 c. $+\infty$
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) =$
 a. 0
 b. $-\infty$
 c. $+\infty$
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
33. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ est :
 a. nulle
 b. strictement négative
 c. strictement positive
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme suivant :

```

Saisir un entier  $N \geq 1$ 
Affecter à  $S$  la valeur 0
Affecter à  $I$  la valeur 0
Tant que  $S < N$ 
    Affecter à  $S$  la valeur  $S + I^2$ 
    Affecter à  $I$  la valeur  $I + 1$ 
Fin de tant que
Afficher  $S$ 
Afficher  $I$ 
  
```

34. La valeur de S affichée pour $N = 30$ est :
 a. 14
 b. 30
 c. 55
 d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
35. La valeur de I affichée pour $N = 30$ est :
 a. 4
 b. 5
 c. 6

- d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
36. La plus petite valeur de N tel que $I = 3$ est :
- 1
 - 2
 - 3
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
37. La plus grande valeur de N tel que $I = 3$ est :
- 1
 - 3
 - 5
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

LES COMPLEXES

38. L'écriture exponentielle de $\sqrt{3} - i$ est :
- $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
 - $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$
 - $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
 - $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
39. $(\sqrt{3} - i)^9$ est :
- un réel strictement négatif
 - un réel strictement positif
 - un imaginaire pur
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

Dans un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) du plan complexe, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z où $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+2}$

40. Si $z = -i$ alors $z' =$.
- $\frac{-1}{5} - \frac{3}{5}i$
 - $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5}i$
 - $\frac{-1}{2} + i$
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
41. Si $z' = -i$ alors $z =$.
- $\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$
 - $\frac{-1}{2} - \frac{3}{2}i$
 - $\frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i$
 - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
42. L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$ est :
- une droite privée d'un point
 - un cercle privé d'un point
 - une droite
 - un cercle
43. L'ensemble des points M tels que $z' = -\overline{z'}$ est :

- a. une droite privée d'un point
- b. un cercle privé d'un point
- c. une droite
- d. un cercle

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0; -5; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; -7; 0)$ et $D(a; 0; -1)$ où a est un réel

44. Une équation du plan (ABC) est :
- a. $3x + y + 2z + 5 = 0$
 - b. $x + y - 6z + 5 = 0$
 - c. $-2x + y - 3z + 5 = 0$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
45. Le triangle ABD est rectangle en B lorsque $a =$
- a. 1
 - b. 3
 - c. 4
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
46. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles lorsque $a =$
- a. $-\frac{10}{7}$
 - b. $\frac{10}{7}$
 - c. 4
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
47. Le nombre de valeurs de a tel que $AD = BC$ est :
- a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
48. $x^2 - 4x + y^2 + 3y = 4$ est une équation :
- a. de cercle
 - b. de sphère
 - c. de plan
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
49. Une équation de la sphère de centre C et de rayon DA est :
- a. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = -25$
 - b. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = 25$
 - c. $x^2 - 2x + y^2 - 14y + z^2 = -25$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

LES PROBABILITÉS

Soient A et B deux évènements non impossibles, non certains et indépendants l'un de l'autre. De manière générale :

50. $P(A \cup B) =$
- a. $P(A) + P(B)$

- b. $P(A) \times P(B)$
 - c. $P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
51. $P_B(\overline{A}) =$
- a. $P_{\overline{B}}(A)$
 - b. $1 - P(A)$
 - c. $P(\overline{A} \cap B)$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $(8; 0,3)$; Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-2; 1]$ et Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

52. $P(X = 1) - P(X = 7)$ est :
- a. nul
 - b. strictement négatif
 - c. strictement positif
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
53. $E(X) =$
- a. 7,7
 - b. 8,3
 - c. 2,4
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
54. $P(-1 \leq Y \leq 2) =$
- a. 1
 - b. $\frac{2}{3}$
 - c. -1
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
55. $E(Y) =$
- a. $-\frac{1}{3}$
 - b. 1
 - c. $\frac{2}{3}$
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
56. $P(Z < -2) - P(Z \geq 2)$
- a. est nul
 - b. est strictement négatif
 - c. est strictement positif
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
57. $E(Z) :$
- a. est nulle
 - b. est strictement négative
 - c. est strictement positive
 - d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

LES STATISTIQUES

Mesdames Ave et Nir se présentent à une élection nationale. Un sondage effectué sur un échantillon de n personnes (où $n \geq 50$) donne 52 % des suffrages à Ave et 48 % à Nir. Soit p la proportion des votants pour madame Ave.

58. Pour $n = 400$, un intervalle de confiance de p , au niveau 95 % est :
- a. $[0,51 ; 0,53]$
 - b. $[0,49 ; 0,55]$
 - c. $[0,47 ; 0,57]$
 - d. $[0,45 ; 0,59]$
59. Le nombre minimal de personnes interrogées permettant d'affirmer, au niveau 95 % que madame Ave va être élue est :
- a. 1 500
 - b. 2 000
 - c. 2 500
 - d. 3 000
60. Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p , il suffirait de multiplier le nombre initial de votants par :
- a. $\frac{1}{4}$
 - b. $\frac{1}{2}$
 - c. 2
 - d. 4

FIN DE L'ÉPREUVE