CONCOURS AVENIR - 8 MAI 2010

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :
Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.
Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point**.

LES LIMITES

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+x+4\cos(x) =$

a. $-\infty$

b. 0

c. n'existe pas

d. aucune des 3 réponses précédentes

2. $\lim\limits_{x\to 0} -2x^2+x+4\cos(x) =$

a. $-\infty$

b. 0

c. n'existe pas

d. aucune des 3 réponses précédentes

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sin(-x)} =$

a. -1

b. 1

c. n'existe pas

d. aucune des 3 réponses précédentes

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(-x)} =$

a. -1

b. 1

c. n'existe pas

d. aucune des 3 réponses précédentes

LES COMPLEXES

Soit $z_1 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_2$ où z_2 est un réel strictement négatif

5. $|z_1| =$

a. $3z_2$

b. $-3z_2$

c. $3\mathrm{i}z_2$

d. $-3\mathrm{i}z_2$

6. $\arg(z_1) =$

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $-\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{3\pi}{4}$

d. $\frac{-3\pi}{4}$

7. $\overline{z_1} =$

a. $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_2$

b. $-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_2$

c. $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_2$

d. $-3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_2$

8. z_1^{10} est un

a. réel strictement positif

b. réel strictement négatif

c. imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive

d. imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative

TRANSFORMATIONS PLANES ET COMPLEXES

Soient f et g les transformations complexes qui à tout point M d'affixe z du plan associent respectivement les points d'affixes $f(z) = -\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$ et $g(z) = -\overline{z}$

9. f est

- **a.** une translation
- **b.** une rotation
- **c.** une homothétie
- **d.** une réflexion

10. g est

- **a.** une translation
- **b.** une rotation
- **c.** une homothétie
- **d.** une réflexion

11. l'affixe du point fixe de f est

- **a.** -1
- **b.** 1
- **c.** $-\mathrm{i}$
- **d.**

12. l'écriture complexe associée à $g \circ f$ est

- **a.** $-\mathrm{i}\overline{z} - 1 - \mathrm{i}$
- **b.** $-\mathrm{i}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}$
- **c.** $\mathrm{i}\overline{z} - 1 - \mathrm{i}$
- **d.** $\mathrm{i}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}$

LOGIQUE

13. Pour prouver que I est le milieu de $[AB]$, il suffit de prouver que

- **a.** pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
- **b.** AI = BI
- **c.** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$
- **d.** $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

14. Pour que quatre points distincts A, B, C et D soient coplanaires, il est nécessaire

- **a.** que trois de ces points soient alignés
- **b.** que les droites (AB) et (CD) soient parallèles ou sécantes
- **c.** de trouver un réel α tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

15. Si a et b sont irrationnels, alors forcément

- **a.** $a + b$ est irrationnel
- **b.** ab est irrationnel
- **c.** a^2 est rationnel
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

16. Si f est définie en a, alors nécessairement

a. f est continue en a

b. $\ln(f)$ est définie en a

c. $\dfrac{1}{f}$ est définie en a

d. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^f}$ est définie en a

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

17. $x^4 - x^2 - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$.

a. 0 solution

b. 1 ou 3 solutions

c. 2 solutions

d. 4 solutions

18. $\left|x^2 - x - 6\right| = 6$ admet dans $\mathbb{R}$

a. 0 solution

b. 1 ou 3 solutions

c. 2 solutions

d. 4 solutions

19. $[\ln(x)]^2 - \ln(x) - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$

a. 0 solution

b. 1 ou 3 solutions

c. 2 solutions

d. 4 solutions

20. $\ln\left(x^2\right) - \ln(x) - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$

a. 0 solution

b. 1 ou 3 solutions

c. 2 solutions

d. 4 solutions

21. $x^2\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-2}$ admet dans $\mathbb{R}$

a. 0 solution

b. 1 solution

c. 2 solutions

d. 3 ou 4 solutions

22. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$

a. $]0\,;\,3[$

b. $]-\infty\,;\,-3[U]0\,;\,+\infty[$

c. $\mathbb{R}$

d. aucune des 3 réponses précédentes

23. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ a pour solution dans

a. $]0\,;\,3[$

b. $]-\infty\,;\,-3[\cup]0\,;\,+\infty[$

c. $\mathbb{R}$

d. aucune des 3 réponses précédentes

ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

24. La somme des solutions complexes de l'équation $z^4 - z^2 - 12 = 0$ est égale à

a. 0

b. 1

c. -12

d. aucune des 3 réponses précédentes

25. Le produit des solutions complexes de l'équation $Z^4 - Z^2 - 12 = 0$ est égale à

a. 0

b. 1

c. -12

d. aucune des 3 réponses précédentes

DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

26. Sur J$\mathbb{R}*$ la dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$ est définie par $f'(x) =$

a. $-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

b. $\dfrac{x+1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

c. $-\dfrac{x+1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

d. aucune des 3 réponses précédentes

27. Sur $]-\infty\,;\,0[$ une primitive F de $x \longmapsto \ln(-x)$ est définie par $F(x) =$

a. $x\ln(-x) - x$

b. $x\ln(-x) + x$

c. $-x\ln(-x) - x$

d. $-x\ln(-x) + x$

28. Sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$ la primitive F de $x \longmapsto \tan(x)$ telle que $F(-\pi) = 0$ est définie par $F(x) =$

a. $\ln[\cos(x)]$

b. $\ln[-\cos(x)]$

c. $-\ln[\cos(x)]$

d. $-\ln[-\cos(x)]$

29. Sachant que sur $\mathbb{R}$: $f''(x) = -f(x)$ alors $f(x)$ ne peut pas être égale à

a. 0

b. e^{-x}

c. $\cos(x)$

d. $\sin(x)$

INTÉGRALES

30. $\displaystyle\int_1^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$

a. $\dfrac{-2}{\mathrm{e}}$

b. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$

c. $-\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right)$

d. aucune des 3 réponses précédentes

31. $\displaystyle\int_{1}^{-1} 1x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$

a. 0

b. $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$

c. $\dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{3}$

d. $\mathrm{e} - 5\mathrm{e}^{-1}$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soient (E) : $y' - 2y = 2x + 5$ et (F) : $y'' - 2y' = 2$

32. Une solution de (E) est définie par $f(x) =$

a. $\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{2x+5}{2}$

b. $\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{2x+5}{2}$

c. $-x - 3$

d. aucune des 3 réponses précédentes

33. Une solution de (F) est définie par $g(x) =$

a. $-\mathrm{e}^{2x} - 1$

b. $-\mathrm{e}^{2x} - x$

c. 1

d. x

34. $y\, : x \longmapsto y(x) = -5\mathrm{e}^{2x} - x - 3$

a. est solution de (E) et de (F)

b. est solution de (E) mais pas de (F)

c. est solution de (F) mais pas de (E)

d. n'est solution ni de (E) ni de (F)

35. $y\, : x \longmapsto y(x) = +\mathrm{e}^{2x} - x + 3$

a. est solution de (E) et de (F)

b. est solution de (E) mais pas de (F)

c. est solution de (F) mais pas de (E)

d. n'est solution ni de (E) ni de (F)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Dans un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $2x - 3y + z = -4$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$

36. Une équation cartésienne du plan passant par A et parallèle à P est

a. $2x - 3y + z = 4$

b. $-2x + 3y - z = 10$

c. $x - y - z = 0$

d. aucune des 3 réponses précédentes

37. Une équation cartésienne d'un plan passant par A et perpendiculaire à P est

a. $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y + z = -\dfrac{13}{3}$

b. $y + 3z = 8$

c. $-x + 2z = -4$

d. aucune des 3 réponses précédentes

38. La distance du point A au plan P est égale à

a. 14

b. $\sqrt{7}$

c. $\sqrt{14}$

d. aucune des 3 réponses précédentes

39. L'intersection du plan P avec la sphère de centre A et de rayon 3 est

a. vide

b. un point

c. un cercle

d. aucune des 3 réponses précédentes

ESPACE ET VECTEURS

Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que

40. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\|$

a. est une droite ou un cercle

b. est une sphère

c. est un plan

d. aucune des 3 réponses précédentes

41. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}\right\|$

a. est une droite ou un cercle

b. est une sphère

c. est un plan

d. aucune des 3 réponses précédentes

42. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\|$

a. est une droite ou un cercle

b. est une sphère

c. est un plan

d. aucune des 3 réponses précédentes

43. $\left(3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

a. est une droite ou un cercle

b. est une sphère

c. est un plan

d. aucune des 3 réponses précédentes

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

(U_n) étant une suite telle que $U_3 = -5$ et $U_6 = 40$.
Si (U_n) est arithmétique alors

44. $U_3 + U_4 + \cdots + U_7 =$

a. 100

b. 200

c. 70

d. aucune des 3 réponses précédentes.

45. $e^{U_3} + e^{U_4} + .. + e^{U_7} =$

a. e^{100}

b. e^{200}

c. e^{70}

d. aucune des 3 réponses précédentes

Si (U_n) est géométrique alors

46. $U_3 + U_4 + \cdots + U_7 =$

a. -165

b. 165

c. 155

d. aucune des 3 réponses précédentes

47. $\ln|U_3| + \ln|U_4| + \cdots + \ln|U_7| =$

a. $ln\left(\dfrac{165}{3}\right)$

b. $ln(165)$

c. $ln(155)$

d. aucune des 3 réponses précédentes

DÉNOMBREMENT

Dans une trousse se trouvent un stylo bleu, deux blancs, quatre rouges indiscernables au toucher les uns des autres, on tire au hasard et simultanément trois de ces stylos.

48. Le nombre de tirages unicolores est égal à

a. 1

b. 2

c. 4

d. aucune des 3 réponses précédentes

49. Le nombre de tirages tricolores est égal à

a. 7

b. 8

c. 9

d. aucune des 3 réponses précédentes

50. Le nombre de tirages bicolores est égal à

a. 23

b. 24

c. 25

d. aucune des 3 réponses précédentes

51. Le nombre de tirages comportant plus de rouges que de blancs est égal à

a. 35

b. 22

c. 19

d. aucune des 3 réponses précédentes

VARIABLES ALEATOIRES

On tire 2 lettres successivement et avec remise d'un sac contenant les lettres M, A, T et H et on considère X la variable aléatoire associée au nombre de voyelles tirées.

Par ailleurs Y est une variable aléatoire indépendante de X prenant pour valeurs $-2; 1$ et 3 avec des probabilités proportionnelles aux carrés de leurs valeurs

52. $P(X=0)=$

a. $\dfrac{7}{16}$

b. $\dfrac{8}{16}$ 16

c. $\dfrac{9}{16}$ 16

d. $\dfrac{10}{16}$ 16

53. $P(Y=3)=$

a. $\dfrac{1}{14}$

b. $\dfrac{4}{14}$

c. $\dfrac{9}{14}$

d. $\dfrac{15}{14}$

54. $\mathrm{E}(X)=$

a. 0

b. $0,5$

c. 1

d. $1,5$

55. $P(X=Y)=$

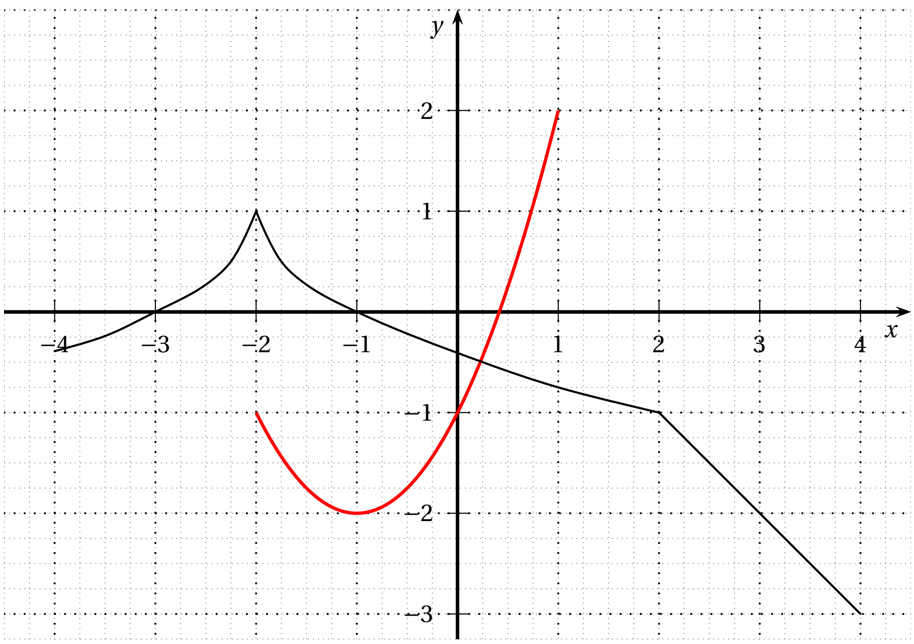
a. $\dfrac{3}{112}$

b. $\dfrac{25}{56}$

c. $\dfrac{1}{112}$

d. aucune des 3 réponses précédentes.

ANALYSE DE COURBES



56. $f \circ g(2) =$

a. n'existe pas

b. 2

c. -2

d. 0

57. sur $[-4 ; -2]$, $g(x) =$

a. $-\sqrt{2-x}+1$

b. $-\sqrt{-2-x}+1$

c. $\sqrt{2-x}+1$

d. $\sqrt{-2-x}+1$

58. l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$ est

a. $[-4 ; 4]$

b. $[-2 ; 1]$

c. $[-4 ; 3]$

d. aucune des 3 réponses précédentes

59. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} =$

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des 3 réponses précédentes

FIN DE L'ÉPREUVE