Concours contrôleur des douanes session 2017

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

20 février 2017 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

Exercice 1

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.
Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
On le lance une fois; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

- **a.** Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
- **b.** Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir?
- **c.** Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

- **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « la troisième boule tirée est noire ».
- **b.** L'évènement « la première boule tirée est noire » a-t-il une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire »? Justifier.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
- **b.** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3

Soient

$$A(1\,;2\,;0),\qquad B(2\,;2\,;0),\qquad C(1\,;3\,;0)\quad \text{et}\quad D(1\,;2\,;1)$$

quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A.
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A.
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.
2. On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.
   a. Résoudre le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ -y + z + 2 & = & 0 \\ -x + z + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$
   b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).
   c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
   En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

Exercice 4

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \text{e}^{x}(1 - x) + 1$$
   a. Étudier le sens de variation de g.
   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1{,}27\,;\,1{,}28]$.
   On note α cette solution. (On prendra $\text{e}^{1{,}27} \approx 3{,}56$ et $\text{e}^{1{,}28} \approx 3{,}59$).
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = \frac{x}{\text{e}^{x} + 1} + 2.$$
   On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour $\mathcal{C}_f$.
   c. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).
3. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la question 1.
4. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.