

∞ Concours contrôleur des douanes session 2014 ∞

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

23 février 2014 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice 1

D'après les statistiques du concours des douanes, sur les candidats aux épreuves de contrôleur de l'année X , on pouvait dire que :

- 55 % tentaient ce concours pour la première fois ;
- 40 % le tentaient pour la seconde fois ;
- 5 % étaient au moins à leur troisième tentative ;
- 60 % de ceux qui le tentaient pour la première fois concouraient pour la branche surveillance ;
- 80 % de ceux qui le tentaient pour la seconde fois concouraient pour la branche des opérations commerciales ;
- 10 % de ceux qui le tentaient pour au moins la troisième fois concouraient pour la branche surveillance.

En choisissant un des candidats au concours de contrôleur de l'année X , on note :

- O l'évènement : « le candidat concourt pour la branche des opérations commerciales »
- S l'évènement : « le candidat concourt pour la seconde fois »
- P l'évènement : « le candidat concourt pour la première fois »
- T l'évènement : « le candidat concourt pour au moins la troisième fois »

On notera $p(E)$ la probabilité de l'évènement E . L'évènement contraire de E sera noté \bar{E} . $p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F .

D'autre part, on supposera que les candidats doivent choisir entre la branche de la surveillance et la branche des opérations commerciales et ne peuvent concourir dans les deux branches.

Les probabilités seront données sous forme décimale au millième près.

1. Donnez $p_P(\bar{O})$, $p_S(O)$ et $p_T(\bar{O})$.
2. Construisez un arbre pondéré résumant la situation.
3. Calculez la probabilité de l'évènement : « le candidat tente le concours pour la première fois et concourt dans la branche des opérations commerciales ».
4. Montrez que la probabilité de l'évènement O est égale à 0,585.
5. On choisit un candidat au hasard parmi ceux qui concourent pour la branche des opérations commerciales.
Calculez la probabilité que ce soit sa première participation au concours.

6. On choisit à présent trois candidats de façon aléatoire et de manière indépendante. Calculez la probabilité qu'il s'agisse de candidats concourant dans la branche des opérations commerciales.

Exercice 2

Soit

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

(on ne cherchera pas à expliciter $f(x)$)

1. Justifiez que f est définie et croissante sur \mathbb{R} .
2. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrez que \mathcal{C} passe par O et donnez l'équation de la tangente à \mathcal{C} en O.
3. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on pose

$$g(x) = f(\tan x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Démontrez que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et déterminez $g'(x)$.

Déduisez-en une expression simple de $g(x)$ en fonction de x .

4. Définissez $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
5. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose :

$$h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Montrez que h est constante et déterminez cette constante.

6. Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
7. Démontrez que f est une fonction impaire.

Exercice 3

Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' les courbes d'équations respectives

$$y = x^3 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x}$$

Expliquez pourquoi \mathcal{C} et \mathcal{C}' ne peuvent pas avoir de tangentes parallèles.