

∞ Concours contrôleur des douanes ∞

Branche Contrôle des opérations commerciales — session 2025

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet. Le sujet et les feuilles de brouillon ne seront ni ramassés ni corrigés.

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note D la droite passant par les points $A(3; -3; 0)$ et $B(4; -1; -1)$.

1. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite D sachant que $t \in \mathbb{R}$, est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

2. On note D' la droite ayant pour représentation paramétrique, sachant que $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = -k + 3 \\ z = k - 2 \end{cases}$$

- Donner un vecteur directeur \vec{u} de la droite D'
 - Démontrer que les droites D' et D sont orthogonales.
 - Démontrer que les droites D' et D ne sont pas sécantes.
3. On considère le plan P d'équation $2x + y + 4z - 3 = 0$
- Démontrer que le plan P contient la droite D
 - Démontrer que le plan P et la droite D' se coupent en un point C dont vous préciserez les coordonnées.
4. On considère la droite Δ passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{v}(1; 2; -1)$
- Démontrer que les droites Δ et D sont strictement parallèles.
 - Démontrer que les droites Δ et D' sont sécantes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit u la fonction sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln(x).$$

- a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
2. a. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
On remarquera que :
$$\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$$
 pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Interpréter graphiquement la limite de f en 0.
- b. Déterminer la fonction f' , dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f .
3. a. Déterminer la position de \mathcal{C} par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 3

Amateur de mots croisés, Mathias s'entraîne sur un site internet.

40 % des grilles qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.

Mathias sait qu'il réussit les grilles de niveau facile dans 95 % des cas, de niveau moyen dans 60 % des cas et de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de mots croisés lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les évènements suivants :

F : « La grille de mots croisés est de niveau facile. » ;

M : « La grille de mots croisés est de niveau moyen. » ;

D : « La grille de mots croisés est de niveau difficile. » ;

R : « Mathias réussit la grille. » et

\overline{R} son évènement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité que la grille de mots croisés proposée soit de niveau difficile et que Mathias la réussisse.
- b. Calculer la probabilité que la grille de mots croisés proposée soit de niveau facile et que Mathias ne la réussisse pas.
- c. Montrer que la probabilité que Mathias réussisse la grille proposée est égale 0,68.
3. Sachant que Mathias n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de mots croisés de niveau moyen ?
4. Mathias a réussi la grille proposée. Sa petite sœur Elyne affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
Dans quelle mesure a-t-elle raison ?
Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

Exercice 4

Le nombre d'arbres de la forêt de Xivry, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2024 + n)$.

En 2024, la forêt de Xivry possède 50 000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, l'ONE, l'Office National des Forêts, décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

Pour cette exercice, on donne les données suivantes :

$$0,95^5 \approx 0,7737; \quad 0,95^6 \approx 0,7350; \quad 0,95^7 \approx 0,6983$$

$$0,94^4 \approx 0,7807; \quad 0,94^5 \approx 0,7339; \quad \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,95)} \approx 17,86; \quad \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} \approx 9,95;$$

$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \approx 13,51,95; \quad \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,94)} \approx 8,25; \quad \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \approx 12,51;$$

N. B : toutes ces données ne sont pas nécessairement utilisables.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 50 \\ u_{n+1} & = & 0,95u_n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$v_n = 60 - u_n.$$

- Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
- Calculer v_0 .
Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
- Démontrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n.$$

- Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2029. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
 - Vérifier que pour tout entier naturel n on a l'égalité $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$.
 - En déduire la monotonie de la suite.
- Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % celui de 2024.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
Interpréter.