

∞ Concours contrôleur des douanes session 27 février 2012 ∞

**Branche du contrôle des opérations commerciales et de
l'administration générale**

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. *Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.*

Exercice 1 (voir dans Concours branche surveillance 2015)

On considère (u_n) et (v_n) , deux suites définies par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6$$

1. La suite (v_n) est-elle une suite arithmétique ou géométrique?
Justifiez votre réponse et précisez quelle est la raison de cette suite.
2. Exprimez $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, puis $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .
3. Déterminez les limites de (S_n) et (S'_n) quand n tend vers $+\infty$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$.

4. Montrez que (w_n) est une suite arithmétique et précisez sa raison.
5. Exprimez $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ en fonction de n , puis calculez la limite de (S''_n) quand n tend vers $+\infty$.
6. Calculez le produit $P_n = v_0 v_1 \dots v_n$ en fonction de n .
Déduisez-en la limite de (P_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x+2}.$$

On note (\mathcal{C}) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe (\mathcal{C}) .
2. **a.** Tracer l'allure de la courbe (\mathcal{C}) ainsi que celle de la courbe de la fonction logarithme népérien que l'on notera L .
Déduire du graphique réalisé, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \ln x$ sur $[1; +\infty[$.

- b. Montrer que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - f(x)$ est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln x$ admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$

Partie B

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = e^x (4 - e^x).$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Soit h' la dérivée de h .
 - a. Calculer $h'(x)$.
 - b. Résoudre l'inéquation $2 - e^x > 0$ et en déduire le signe de $h'(x)$ et le sens de variations de h .
3. Dresser le tableau de variations de h
4. On considère l'équation $h(x) = 3$.
 - a. Vérifier que $x = 0$ est solution de cette équation.
 - b. Vérifier la relation $h(x) - 3 = (e^x - 3)(1 - e^x)$ et en déduire la valeur de la solution non nulle, λ , de l'équation $h(x) = 3$.

Exercice 3

On réalise une enquête portant sur la réussite à un concours administratif (qui ne comporte qu'une seule épreuve).

Cette enquête montre que :

- avant de s'y présenter, 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement ce concours;
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement ce concours, il l'obtient dans 80 % des cas;
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé ce concours, il ne l'obtient pas dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer le concours (on suppose que les résultats sont connus dès la fin de l'unique épreuve).

On considère les événements suivants :

T l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »;

R l'évènement « le candidat est reçu à ce concours »;

Les résultats seront donnés sous forme de décimales (en utilisant des puissances, le cas échéant).

1.
 - a. Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et est reçu au concours »
 - b. Montrer que la probabilité $P(R)$ qu'un candidat soit reçu à ce concours est égale à 0,675.
2. Le candidat interrogé vient d'échouer au concours. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement?
3. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats. Calculer la probabilité P_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué au concours.

Exercice 4

Un marchand de guitares vend le même jour cinq guitares identiques à des particuliers.

Ce marchand accorde les guitares avant de les remettre à ses clients.

La probabilité qu'une guitare de ce type soit toujours accordée 6 mois après la vente est de 0,8.

Calculer les probabilités pour que :

1. les cinq guitares soient toujours accordées 6 mois après la vente;
2. les cinq guitares soient désaccordées 6 mois après la vente;
3. trois guitares soient désaccordées 6 mois après la vente;
4. deux guitares au plus soient désaccordées 6 mois après la vente.