Concours contrôleur des douanes
session 2010

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$$

On note C sa représentation graphique.

1. Calculer $f(0)$
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de f puis factoriser l'expression de cette dérivée.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 2

I - Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E.

II - Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe.
On appelle Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique.
Quelle conclusion peut-on tirer en comparant les espérances mathématiques obtenues dans chacun de ces 2 cas ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 2 - \ln x$$

et C sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer l'intervalle I sur lequel la fonction f est définie, puis donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   En déduire que C admet une asymptote et donner une équation de celle-ci.
   b. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   c. Calculer $f'(x)$ et vérifier que sur l'intervalle I le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$.
   d. En déduire le tableau de variations de f.
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
   b. Tracer un repère orthonormé et donner l'allure des courbes C et T.

3. **a.** On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = x\ln x - x.$$

Calculer la dérivée $h'(x)$.

b. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - 2$.
Déterminer une primitive G de g sur $]0 ; +\infty[$.

c. En utilisant les résultats précédents, déterminer une primitive F de f.

d. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
Donner une valeur numérique approchée de celle-ci (à cette fin, on donne l'approximation $\ln 2 \approx 0,69$).

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle la suite (u_n) est stationnaire (rappel : (u_n) est une suite stationnaire signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n =constante).
2. On pose désormais $u_0 = 2$ et on définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 1$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère $\left(O ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormal.
Soit s un nombre réel.
On donne les points A(8 ; 0 ; 8), B(10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite D d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -5+3s \\ y &=& 1+2s \\ z &=& -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par A et B

b. Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.

2. **a.** Le plan P est parallèle à D et contient Δ.
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2 ; -2 ; 1)$ est un vecteur normal à P et déterminer une équation cartésienne de P.

b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de D à P est indépendante de M.