

# Concours contrôleur des douanes

session 2013

OPTION A : Mathématiques

## Exercice n° 1 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{4n-2}{n+2}$ .

1. Donner, par calcul, les valeurs approchées au centième de  $u_0$  à  $u_{10}$  et  $u_{100}$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $-1 \leq u_n \leq 4$ .  
On dit (remplir les blancs) que la suite  $(u_n)$  est ..... par  $(-1)$  et ..... par  $(4)$ .
3. Étudier le sens de variation de  $(u_n)$ .
4. Démontrer que, pour  $n$  suffisamment grand, on a  $u_n > 3,999$ . Que peut-on penser de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ?

## Exercice n° 2 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = ax + b + 3 \ln(x+1)$$

où  $a$  et  $b$  désignent deux réels que l'on déterminera dans la question 1.

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

$\mathcal{C}_f$  vérifie les conditions suivantes : elle passe par le point  $A(0; 7)$  où elle admet une tangente horizontale et est monotone de part et d'autre de cet extremum.

1. Déterminer  $a$  et  $b$ .
2. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de  $f$  ? (sans étudier le signe de la dérivée).
3. On suppose désormais que la fonction  $f$  est définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = -3x + 7 + 3 \ln(x+1)$$

- a. Calculer la limite de  $f$  en  $-1$ . Interpréter graphiquement le résultat.  $x$
  - b. En admettant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
4. Calculer  $f'(x)$  et étudier les variations de  $f$ .  
Dresser le tableau de variation.
  5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = (x+1) \ln(x+1) - x.$$

Calculer  $g'(x)$  et en déduire l'expression de la primitive de  $f$  s'annulant pour  $x = 0$ .

## Exercice n° 3 :

Un concours des douanes compte 11 000 inscrits dont 40 % sont des femmes. On dénombre 30 % des hommes et 40 % des femmes qui parlent une langue étrangère.

Partant du principe qu'on interroge l'un de ces 11 000 candidats :

1. Calculer la probabilité que cette personne soit une femme parlant une langue étrangère.
2. Calculer la probabilité que cette personne soit une femme ne parlant aucune langue étrangère.
3. Sachant que la personne parle une langue étrangère, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme?